21) **Resposta**: 14

Comentário e resolução

01. **Incorreta**. Como 1 rd $\cong$ 57°, então 10 rd $\cong$ 570°.

$$\begin{array}{r|l} 570^\circ & 360^\circ \\ \hline -360^\circ & 1 \\ 210^\circ & \end{array}$$

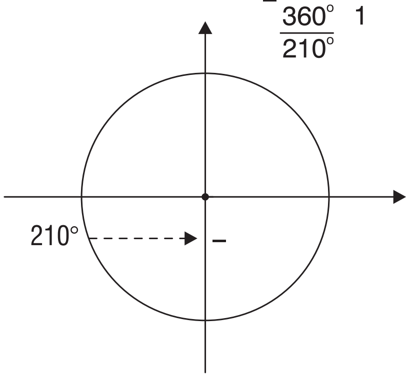
$f(x) = \text{sen } x$

$f(10) = \text{sen } (10)$

$f(10) = \text{sen } (570^\circ)$

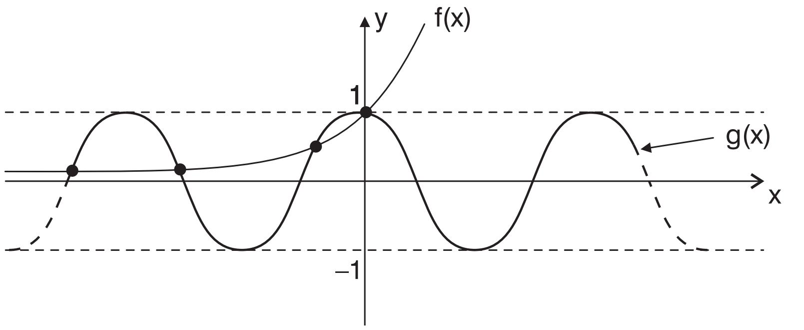
$f(10) = \text{sen } (210^\circ) \Rightarrow$

$f(10) < 0$



02. **Correta**.

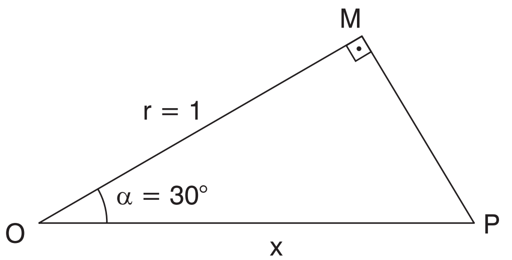
Gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \cos x$



Para $x \in R$, os gráficos de f(x) e g(x) se interceptam em infinitos pontos.

04. **Correta**.

Do triângulo OMP tem-se:

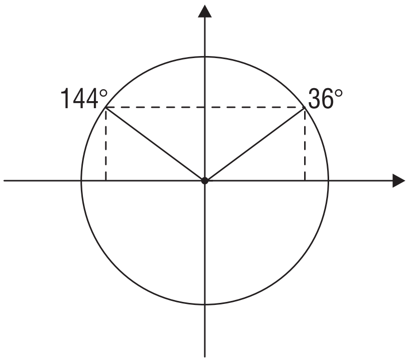


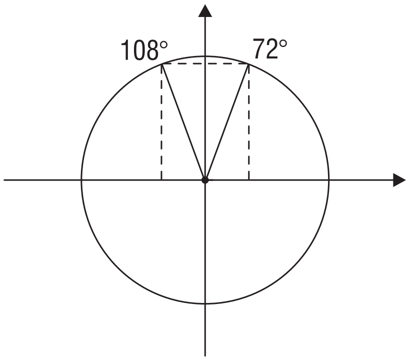
$$\cos 30^\circ = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

As coordenadas do ponto P são $P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$.

08. **Correta**. Os ângulos suplementares possuem cossenos opostos.





$\cos 36° = -\cos 144°$

$\cos 36° + \cos 144° = 0$

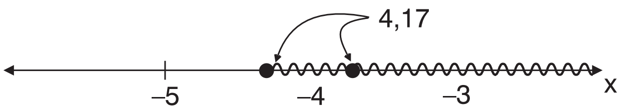
$\cos 72° = -\cos 108°$

$\cos 72° + \cos 108° = 0$

Portanto, $\cos 36° + \cos 72° + \cos 108° + \cos 144° = 0$

16. **Incorreta**.

$20 - 3 \,.\, (2x + 15) < 0$
$20 - 6x - 45 < 0$
$-6x < 25 \quad \div(-6)$
$x > \dfrac{-25}{6}$
$x > -4{,}17$

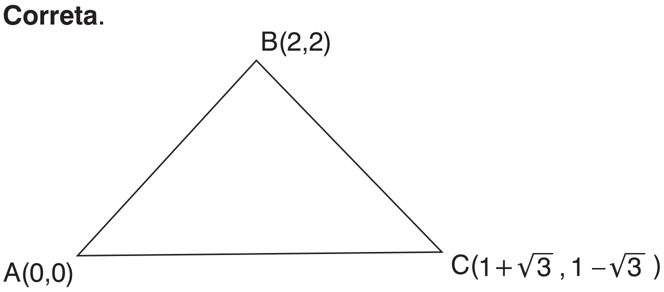


Menor inteiro: –4

22) **Resposta**: 07

Comentário

01. **Correta**.



$d_{AB}^2 = (2 - 0)^2 + (2 - 0)^2$
$d_{AB} = \sqrt{8}$

$d_{AC}^2 = (1 + \sqrt{3} - 0)^2 + (1 - \sqrt{3} - 0)^2$
$d_{AC}^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})^2$
$d_{AC}^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 3$
$d_{AC} = \sqrt{8}$

Como $d_{AB} = d_{AC}$, então o triângulo é isósceles.

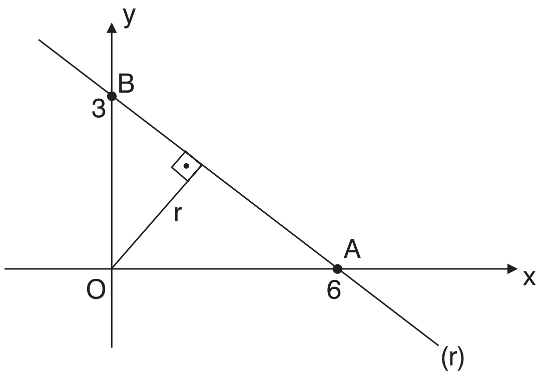
Obs.: Como $d_{BC} = \sqrt{8}$, então o triângulo também é equilátero.

02. **Correta**. Para determinar as intersecções entre $y = 5x - 3$ e $f(x) = x^2 + x + 1$, faremos um sistema:

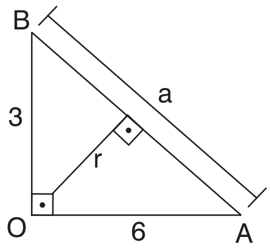
$$\begin{cases} y = 5x - 3 \\ y = x^2 + x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & x^2 + x + 1 = 5x - 3 \\ & x^2 - 4x + 4 = 0 \\ & \Delta = (-4)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 4 \\ & \Delta = 0 \end{aligned}$$

Como $\Delta = 0$, então as funções possuem um único ponto em comum.

04. **Correta**.



A distância do ponto O(0, 0) até a reta (r) será o raio da circunferência.



$a^2 = 3^2 + 6^2$

$a = 3 \,.\, \sqrt{5}$

O triângulo retângulo AOB, temos:

$3 \,.\, \sqrt{5} \,.\, r = 6 \,.\, 3 \Rightarrow r = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$

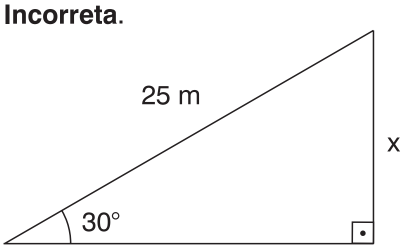
Equação da circunferência

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}}\right)^2$

$x^2 + y^2 = \dfrac{36}{5}$

08. **Incorreta**.



$\text{sen } 30° = \dfrac{x}{25}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{25}$

$x = 12{,}5 \text{ m}$

Portanto, a altura da árvore será: 12,5 + 1,80 – 0,10 = 14,20 m.

23) **Resposta**: 12

Comentário e resolução

01. **Incorreta**.

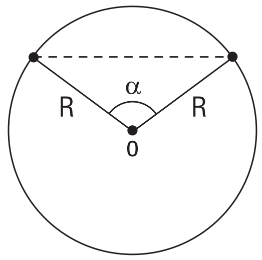
$V = \dfrac{A_b \,.\, h}{3}$

$V = \dfrac{b \,.\, h'}{2} \,.\, \dfrac{h}{3}$

$V = \dfrac{3 \,.\, 3}{2} \,.\, \dfrac{3}{3}$

$V = 4{,}5 \text{ cm}^3$

02. **Incorreta**.



$$A = \frac{a \ . \ b \ . \ \text{sen} \ \hat{c}}{2}$$

$$A = \frac{R \ . \ R \ . \ \text{sen} \ \hat{c}}{2}$$

Para termos maior área, tomaremos o maior sen $\hat{c}$ que seria 1, para $\hat{c} = 90^o$. Logo, o maior triângulo seria o retângulo.

04. **Correta**. Como E, necessariamente, torna-se baricentro, pois M é ponto médio e $\overline{BE} = 2 \ . \ \overline{ED}$, se $\overline{AF}$ passar por E, dividirá $\overline{BC}$ no seu ponto médio.

08. **Correta**.

$(139^o, 141^o, 143^o, ...)$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \ . \ n}{2}$$

$$S_{12} = \frac{(139^o + 139^o + 11 \ . \ 20) \ . \ 12}{2}$$

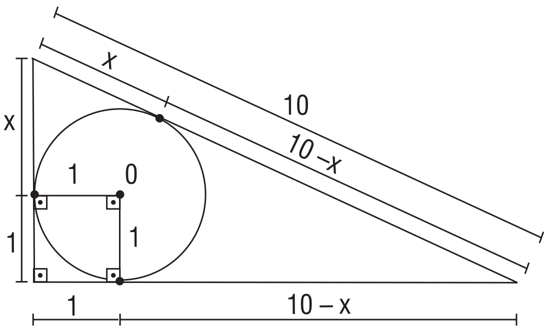
$$S_{12} = 1800^o$$

$S_i = 180^o \ (n - 2)$
$S_i = 180^o \ (12 - 2)$
$S_i = 1800^o$

16. **Incorreta**. O certo seria: se o paralelogramo tem diagonais congruentes, ele é um retângulo, ou se o quadrilátero é um retângulo, tem diagonais congruentes. Ou seja, uma implicação, e não uma bi-implicação matemática.

24) **Resposta**: 11

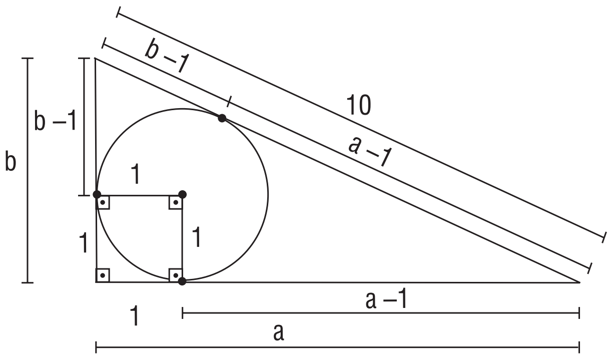
Resolução



$S = P \ . \ a$
$S = 11 \ . \ 1$
$S = 11 \text{ cm}^2$

$2P = 10 + x + 1 + 10 - x + 1$
$2P = 22 \text{ cm}$

ou



$b - 1 + a - 1 = 10$
$a + b = 12$

$2P = a + b + 10$
$2P = 22 \text{ cm}$

$S = P \ . \ a$
$S = 11 \ . \ 1$
$S = 11 \text{ cm}^2$

25) **Resposta**: 22

Comentário e resolução

01. **Incorreta**. Seja **n** o número de convidados e **c** o custo por convidado.

CT = CV + CF
CT = n . c + CF
440 = 40 . c + CF (I)
800 = 100 . c + CF (II)

Resolvendo (I) e (II) encontramos c = 6 e CF = 200

Portanto, o custo total é:

CT = 6 . n + 200

Para n = 55 convidados temos:

CT = 6 . 55 + 200
CT = 530

02. **Correta**. Se um cubo de aresta L_1 está inscrito numa esfera de raio R_1, então:

$$2R_1 = L_1\sqrt{3} \Rightarrow L_1 = \frac{2R_1}{\sqrt{3}}$$

Inscrevendo-se uma esfera de raio R_2 no cubo de aresta L_1, temos:

$$2R_2 = L_1 \Rightarrow R_2 = \frac{L_1}{2} \Rightarrow \boxed{R_2 = \frac{R_1}{\sqrt{3}}}$$

Repetindo o processo:

$$2R_2 = L_2 \, . \, \sqrt{3} \Rightarrow L_2 = \frac{2 \, . \, R_2}{\sqrt{3}} \Rightarrow L_2 = \frac{2R_1}{3}$$

$$2R_3 = L_2 \Rightarrow R_3 = \frac{L_2}{2} \Rightarrow \boxed{R_3 = \frac{R_1}{3}}$$

$$S = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$$

$$S = R_1 + \frac{R_1}{\sqrt{3}} + \frac{R_1}{3} + \ldots$$

$$S = \frac{R_1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}\,R_1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{R_1 \, . \, (3 + \sqrt{3})}{2}$$

04. **Correta**. Progressão aritmética com a_1 = a e r = a:

PA: (a, 2a, 3a, ..., k . a)
P = a . 2a . 3a . ... . k . a
P = (a . a ... a) . (1 . 2 . 3 ... k)
P = a^k . k

08. **Incorreta**. As colunas da matriz A estão em combinação linear, pois:

(2^a C) – (1^a C) = (3^a C) – (2^a C)
Dessa maneira, o determinante de A é zero. Portanto, A não é inversível.

16. **Correta**.

Desenvolvendo a sequência, temos:
bn = log an, $1 \le n \le k$

$b_1 = \log a_1$
$b_2 = \log a_2$
$b_3 = \log a_3$
$\vdots \quad \vdots$
$b_k = \log a_k$

Condição para PA: $b_2 - b_1 = b_3 - b_2$

$$b_2 - b_1 = \log a_2 - \log a_1 = \log \frac{a_2}{a_1} \quad \text{(I)}$$

$$b_3 - b_2 = \log a_3 - \log a_2 = \log \frac{a_3}{a_2} \quad \text{(II)}$$

Como (a_n) é uma PG, podemos concluir que (I) = (II) e assim (b_n) é uma PA.

26) **Resposta**: 11

Comentário

01. **Correta**.

$$\begin{array}{llll} 3^0 = 1 & 3^3 = 27 & 3^6 = 729 & 3^9 = \_\,\_\,\_\ \underline{3} \\ 3^1 = 3 & 3^4 = 81 & 3^7 = 2187 & 3^{10} = \quad \underline{9} \\ 3^2 = 9 & 3^5 = 243 & 3^8 = 6561 & \vdots \end{array}$$

02. **Correta**.
1º) Considere que o 2 seja um dos primos. Então, ficaremos com a soma de dois pares com um ímpar, que dará como resultado um número ímpar.
2º) Se os três forem ímpares, teremos a soma de 3 números ímpares (produto ímpar . ímpar = ímpar), que terá como resultado número ímpar.
Portanto, S = ab + ac + bc é sempre um número ímpar.

04. **Incorreta**.

$$\begin{cases} g + R = 3{,}8 \\ \quad R = g + 3{,}2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} g + g + 3{,}2 &= 3{,}8 \\ 2g &= 0{,}6 \\ g &= 0{,}3 \end{aligned}$$

08. **Correta**.

$$\left(-\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{1}{2} - 2 \,.\, \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2\frac{\sqrt{6}}{6} =$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{5}{6} - \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{5}{6} - \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Portanto: $A = \sqrt{\left(-\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2} - \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}}$

$$A = \left|-\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}}\right| - \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Como: $\sqrt{\frac{1}{2}} > \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} = 0$$

27) **Resposta**: 02

Comentário

01. **Incorreta**. Total de números de 3 algarismos possíveis, usando o PFC.

$\boxed{D}\ \boxed{C}\ \boxed{U}$
$5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 125$

Total de palíndromos, usando PFC:

$\boxed{D}\ \boxed{C}\ \boxed{D}$
$5 \,.\, 5 \,.\, 1 = 25$

Probabilidade:

$$p = \frac{25}{125} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$$

02. **Correta**. Permutando 8 letras D e 4 letras C:

$$P_{12}^{4,\,8} = \frac{12!}{4!\,8!} = \frac{12 \,.\, 11 \,.\, 10 \,.\, 9}{4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1} = 495$$

04. **Incorreta**. Conjunto de múltiplos de 7
$M(7) = \{7, 14, 21, ..., 259\}$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$
$259 = 7 + (n - 1) \cdot 7$
$n = 37$

Probabilidade:

$$p = \frac{\text{nº de resultados de interesse}}{\text{nº de resultados possíveis}} = \frac{37}{260}$$

08. **Incorreta**.
Números pares com 3 algarismos diferentes:

$\boxed{C}\ \boxed{D}\ \boxed{0}$
$4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$
$\boxed{C}\ \boxed{D}\ \boxed{2 \text{ ou } 4}$
$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ Total: $12 + 18 = 30$

Números ímpares com 3 algarismos diferentes:

$\boxed{C}\ \boxed{D}\ \boxed{1 \text{ ou } 3}$
$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ Total: 18

28) **Resposta**: 19

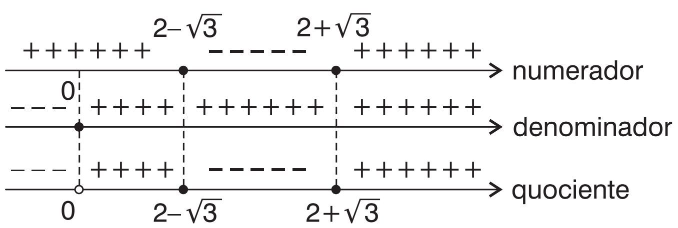
Comentário

01. **Correta**. Com base no teorema das raízes complexas ($a \pm bi$).
02. **Correta**.
$R = P(-1)$
$R = (-1)^{72} + 3 \cdot (-1)^{60} - 2 \cdot (-1)^{15} + (-1)^{10} - 2(-1)^5 + 5$
$R = 1 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1$
$R = 10$
04. **Incorreta**.
$\sqrt{3x + 15} = x - 1$
$3x + 15 = (x - 1)^2$
$3x + 15 = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 5x - 14 = 0$
$x = -2$ (não convém) ou $x = 7$

08. **Incorreta**.
$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x} \leq 1$$
$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x} - 1 \leq 0$$
$$\frac{x^2 - 4x + 1}{x} \leq 0$$

Quadro de sinal



$S = \{x \in R / x < 0 \text{ ou } 2 - \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3}\}$

16. **Correta**. Relações de Girard

$x^2 - x + c = 0$ tem raízes α e β:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \text{ (I)} \\ \alpha \ . \ \beta = c \text{ (II)} \end{cases}$$

$x^2 - bx + 2 = 0$ tem raízes $\alpha + 1$ e $\beta + 1$:

$$\begin{cases} (\alpha + 1) + (\beta + 1) = b \text{ (III)} \\ (\alpha + 1) \ . \ (\beta + 1) = 2 \text{ (IV)} \end{cases}$$

De (I) e (II) obtemos b = 3.

Desenvolvendo (IV):

$\alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = 2 \Rightarrow \alpha\beta = 0 \Rightarrow c = 0$

Assim, concluímos que b + c = 3

32. **Incorreta**. Se a < 0 e b < 0, a igualdade deixa de ser verdadeira.

29) **Resposta**: 13

Comentário e resolução

01. **Correta**. Observe a tabela abaixo:

n	101^n	$101^n - 1$
1	101	100
2	10 201	10 200
3	1 030 301	1 030 300
⋮	⋮	⋮

Dessa maneira, o número ($101^{50} - 1$) também terá os 2 algarismos finais (dezena e unidade) iguais a 2 zeros. Sendo assim, concluímos que ($101^{50} - 1$) é múltiplo de 4.

02. **Incorreta**.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

O sistema é impossível com a 1ª e a 2ª equação. Temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \quad .(-3) \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - 3y - 3z = -3 \\ \underline{3x + 3y + 3z = 0} \end{cases} \oplus$$

$$0 = -3$$

04. **Correta**. O binômio é $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right)^n$.

A fórmula dada é para o binômio $(x + a)^n$.

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} . a^p . x^{n-p}$$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} . \left(\frac{1}{x}\right)^p . \left(\sqrt{x}\right)^{n-p}$$

Para p = 4, temos:

$$T_{4+1} = \binom{n}{4} . \left(\frac{1}{x}\right)^4 . \left(\sqrt{x}\right)^{n-4}$$

$$T_5 = \binom{n}{4} . x^{-4} . x^{\frac{n-4}{2}}$$

$$T_5 = \binom{n}{4} . x^{\frac{n-12}{2}}$$

Como o expoente de **x** é inteiro, temos:

$$\frac{n - 12}{2} = K, K \in Z$$

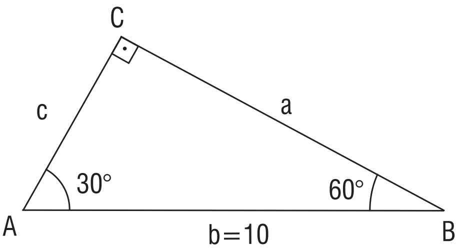
$n - 12 = 2K$

$n = 2K + 12$

$n = 2 . (K + 6)$

Portanto, **n** é par.

08. **Correta**.



$$\text{sen } 30° = \frac{a}{10}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{10}$$

$$a = 5$$

$b^2 = a^2 + c^2$

$10^2 = 5^2 + c^2$

$c = \sqrt{75}$

$c = 5\sqrt{3}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 5\sqrt{3} \\ \text{sen } 30° & \text{sen } 60° & \text{sen } 90° \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 5\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$10 + 5\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2} - 5 - \frac{5 \cdot 3}{2} - 5$$

$$\cancel{10} + \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} - \cancel{10} - \frac{15}{2}$$

$$\left(\frac{10\sqrt{3}}{2} - \frac{15}{2}\right) \neq 0$$

30) **Resposta**: 10

Comentário

01. **Incorreta**.

$$\Delta = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = 0$$

$a^2 - 1 = 0$

$a^2 = 1$

$a = \pm 1$

$$\Delta x \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a^2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } \Delta y \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \neq 0$$

$a - 1 \neq 0$

$a \neq 1$

$a^2 - a \neq 0$

$a\,(a - 1) \neq 0$ — $a \neq 0$ e $a \neq 1$

Se $a = 1 \Rightarrow \Delta x = 0$ e $\Delta y = 0$.

02. **Correta**.

$(1 + x)^n \Rightarrow$

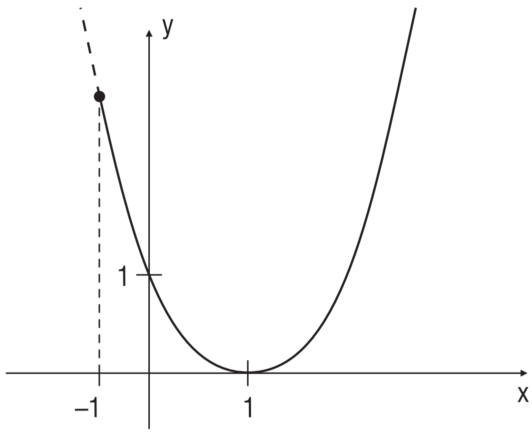
$$T_1 = \binom{n}{0} 1^n \cdot x^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$T_2 = \binom{n}{1} 1^n \cdot x^1 = n \cdot 1 \cdot x = nx$$

$T_1 + T_2 = 1 + nx$

$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots = 1 + nx + T_3 + \ldots = (1 + x)^n \geq 1 + nx$

04. **Incorreta**. Observe o gráfico da função g(x):



A função g(x) é sobrejetora, e não injetora. Portanto, ela não é bijetora, logo ela não é inversível.

08. **Correta**.

$f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = x^2 + 1$

$fog(x) = f(g(x)) = \text{sen } (x^2 + 1)$

$fog(-x) = f(g(-x)) = \text{sen } ((-x)^2 + 1) = \text{sen } (x^2 + 1)$

logo, $(fog)(x) = (fog)(-x)$

Comentário final

A prova estava muito abrangente, conceitual e mais uma vez de ótimo nível.
Distribuição de questões por temas/itens:

Trigonometria: 4
Funções: 5
Inequações: 2
Geometria analítica: 2
Geometria plana: 4 + 1 aberta
Geometria espacial: 1
Matemática básica: 8
Progressão geométrica: 2
Progressão aritmética: 1
Matrizes: 1
Determinantes: 1
Sistemas: 2
Probabilidades: 2
Análise combinatória: 2
Polinômios e equações: 2
Binômio de Newton: 2