Resolução – Matemática
Prova Amarela

01) **Resposta**: 09

Comentário e resolução

01. **Correta**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ det A = 10 – 80 = –70 $\neq$ 0
Logo, A é inversível.

02. **Incorreta**. Observe o contra-exemplo.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

04. **Incorreta**. $M_{5\times 7} \,.\, P_{7\times 5} = R_{5\times 5}$
$R^2 = R_{5\times 5} \,.\, R_{5\times 5} \Rightarrow$ terá como resultado uma matriz 5 x 5, portanto com 25 elementos.

08. **Correta**. Quando calculamos a transposta de uma matriz quadrada, a diagonal principal não se altera.
Observe o exemplo:

$$L = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow tr(L) = a + e + i$$

$$L^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \Rightarrow tr(L^t) = a + e + i$$

02) **Resposta**: 05

Resolução

f é do 1º grau: f(x) = ax + b
f(3) = 2 $\Rightarrow$ 3a + b = 2 $\Rightarrow$ b = 2 – 3a (**I**)
f(f(1)) = 1 $\Rightarrow$ f(a + b) = 1 $\Rightarrow$ a . (a + b) + b = 1
$\Rightarrow$ a^2 + ab + b = 1 (**II**)

Substituindo **I** em **II**, temos:

$a^2 + ab + b = 1$
$a^2 + a\,.\,(2 - 3a) + (2 - 3a) = 1$
$a^2 + 2a - 3a^2 + 2 - 3a = 1$
$2a^2 + a - 1 = 0$

a' = –1
a" = 1/2 (Não serve. A função é decrescente.)

Substituindo a = –1 em **I**, encontramos:

b = 2 – 3a
b = 2 – 3 . (–1)
b = 5

f(x) = ax + b $\Rightarrow$ f(x) = –x + 5

A raiz de f(x) é:

–x + 5 = 0 $\Rightarrow$ x = 5

03) **Resposta**: 07

Comentário e resolução

01. **Correta**.
f(x) = 3x + a

Trocando **x** por **y** e **y** por **x**, e isolando **y**, temos:

x = 3y + a

$$y = \frac{x}{3} - \frac{a}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{3} - \frac{a}{3}$$

Comparando $f^{-1}(x)$ com g(x), obtemos:

$f^{-1}(x) = g(x)$

$$\frac{x}{3} - \frac{a}{3} = \frac{x}{3} + 1 \Rightarrow -\frac{a}{3} = 1 \Rightarrow a = -3$$

02. **Correta**.
Termo geral de a_n: $a_n = a_1 + (n - 1)\,.\,r_1$
Termo geral de b_n: $b_n = b_1 + (n - 1)\,.\,r_2$

Somando a_n com b_n, temos:

$a_n + b_n = (a_1 + b_1) + (n - 1)\,.\,r_1 + (n - 1)\,.\,r_2$
$a_n + b_n = (a_1 + b_1) + (n - 1)\,.\,(r_1 + r_2)$

Portanto, $(a_n + b_n)$ é uma P.A., em que $(a_1 + b_1)$ é o 1º termo e $(r_1 + r_2)$ é a razão.

04. **Correta**.

$\sqrt{x^2+1} = x - 1$

$(\sqrt{x^2+1})^2 = (x-1)^2 \Rightarrow x^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$

Verificando, temos:

$\sqrt{x^2+1} = x - 1$

$\sqrt{(0)^2+1} = 0 - 1 \Rightarrow \sqrt{1} = -1$ (falso)

08. **Incorreta**.

$$\frac{4^{3+x} - 4^{x-3}}{4^x + 4^{x-3}} \Rightarrow \frac{4^3.\,\cancel{4^x} - \cancel{4^x}.\,4^{-3}}{\cancel{4^x} + \cancel{4^x}.\,4^{-3}} \Rightarrow \frac{64 - 1/64}{1 + 1/64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{64^2 - 1}{\cancel{64}}}{\frac{64+1}{\cancel{64}}} \Rightarrow \frac{64^2 - 1}{64 + 1} \Rightarrow \frac{\cancel{(64+1)}\,.\,(64-1)}{\cancel{(64+1)}} = 63$$

16. **Incorreta**.

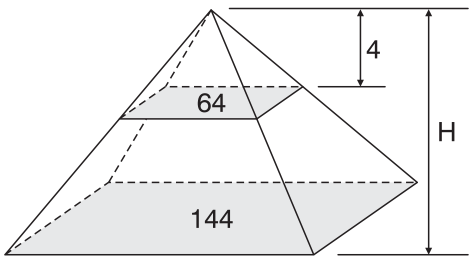
$$\frac{n^2 - 1}{n + 1} = n - 1$$

Se n = –1, temos $\frac{0}{0} = -2$.

Sabe-se que $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação.

04) **Resposta**: 06

Resolução



$$\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_b}{A_B}$$

$$\left(\frac{4}{H}\right)^2 = \frac{64}{144}$$

$$\frac{16}{H^2} = \frac{4}{9}$$

$H^2 = 36$

$H = 6$ m

05) **Resposta**: 03

Comentário e resolução

01. **Correta**.

Modo 1

$$V_A = \frac{T}{9}$$

Como B trabalha com velocidade 50% maior, temos que $V_B = 1{,}5\ V_A$.

Logo, $V_B = 1{,}5 \cdot \frac{T}{9} = \frac{T}{6}$.

Então, B faz o trabalho em seis dias.

Modo 2

dias	velocidade
↑ 9	x ↓
t	1,5x

$$\frac{9}{t} = \frac{1{,}5x}{x}$$

$1{,}5t = 9 \Rightarrow t = 6$ dias

02. **Correta**.

x: número de vendedores

$$\frac{144}{x} + 1 = \frac{144}{x-12}$$

$$\frac{144(x-12)+x(x-12)}{x(x-12)} = \frac{144x}{x(x-12)}$$

$$\cancel{144x} - 1728 + x^2 - 12x = \cancel{144x}$$

$$x^2 - 12x - 1728 = 0 \begin{cases} x = 48 \\ \text{ou} \\ \cancel{x = -36} \end{cases}$$

x = 48 vendedores

Como faltaram 12 vendedores no dia da distribuição, temos então 36 vendedores presentes nesse dia.

04. **Incorreta**.

Modo 1

Suponha x = 100

Então, $y = 100 + \frac{20}{\cancel{100}} \cdot \cancel{100} = 120$

Logo, $y - \frac{20}{100}y = 120 - \frac{20}{100} \cdot 120 = 96$

Modo 2

Redução de 20% = 0,8 . x

Acréscimo de 20% = 1,2 . 0,8 . x

Valor final = 0,96 . x

Valor inicial = x

08. **Incorreta**.

$x + y = 29 \Rightarrow y = 29 \cdot x$

$x^2 + y^2 = V$

$x^2 + (29 - x)^2 = V$

$V = x^2 + x^2 - 58x + 841$

$V = 2x^2 - 58x + 841$

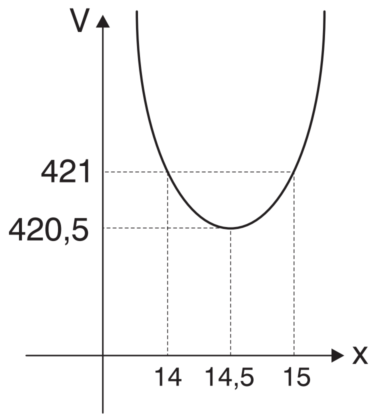
Esta parábola tem valor mínimo $V_v \Rightarrow$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{58}{4} = 14{,}5 \Rightarrow V_v = -\frac{\Delta}{4a} = 420{,}5$$

Como $x \in N$, **x** poderá ser 14 ou 15.

Se $x = 14 \Rightarrow y = 15 \Rightarrow x^2 + y^2 = 421$

$x = 15 \Rightarrow y = 14 \Rightarrow x^2 + y^2 = 421$



Outro modo de resolução

$x + y = 29$

$(x + y)^2 = (29)^2$

$x^2 + 2xy + y^2 = (29)^2$

$x^2 + y^2 = (29)^2 - 2 \cdot xy$

Para que $x^2 + y^2$ seja mímino, deve-se ter x . y sendo máximo: ($x \in N$ e $y \in N$).

Logo, x = 14 e y = 15 ou x = 15 e y = 14.

$x^2 + y^2 = 841 - 2 \cdot 14 \cdot 15$

$x^2 + y^2 = 421$

06) **Resposta**: 24

Resolução

Seja **n** o nível do líquido e **d** o número de dias.

Líquido I

$\Downarrow$

$$N_{(I)} = 100 - \frac{100}{40} \cdot d$$

Líquido II

$\Downarrow$

$$N_{(II)} = 80 - \frac{80}{48} \cdot d$$

$$N_{(I)} = N_{(II)}$$

$$100 - \frac{10\cancel{0}}{4\cancel{0}} \cdot d = 80 - \frac{80}{48} \cdot d$$

$$100 - \frac{5}{2} \cdot d = 80 - \frac{5}{3} \cdot d$$

$d = 24$

Os dois líquidos terão o mesmo nível para $d = 24$.

07) **Resposta**: 22

Comentário e resolução

01. **Incorreta**. Não é possível estabelecer função injetora de A em B, pois $n(A) > n(B)$.
02. **Correta**.
Se $\log_3 2 = y$, então $3^y = 2$ (I)
Se $16^x = 9$, então $2^{4x} = 9$ (II)

Substituindo **I** em **II**, temos:

$$2^{4x} = 9 \Rightarrow (3^y)^{4x} = 9 \Rightarrow 3^{4xy} = 3^2 \Rightarrow 4 \cdot x \cdot y = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot y = \frac{1}{2}$$

04. **Correta**.
Seja C_1 uma circunferência de raio **r** e comprimento $2\pi r$.
Seja C_2 uma circunferência de comprimento $2\pi r + 4$ e raio R.
O raio da circunferência C_2 pode ser assim obtido:

$$2\pi R = 2\pi r + 4 \Rightarrow R = \frac{2\pi r}{2\pi} + \frac{4}{2\pi} \Rightarrow R = r + \frac{4}{2\pi}$$

08. **Incorreta**. O total de maneiras de ordenarmos 5 pessoas é:
$P_5 = 5! = 120$
Em metade das possibilidades a senhorita estará passando pela porta na frente do cavalheiro.
Assim, a resposta é 60.
16. **Correta**. Vamos desenvolver a divisão.

$$\frac{15^{22}}{125} = \frac{(3 \cdot 5)^{22}}{5^3} = \frac{3^{22} \cdot 5^{22}}{5^3} = 3^{22} \cdot 5^{19}$$

Portanto, 125 é divisor de 15^{22}.

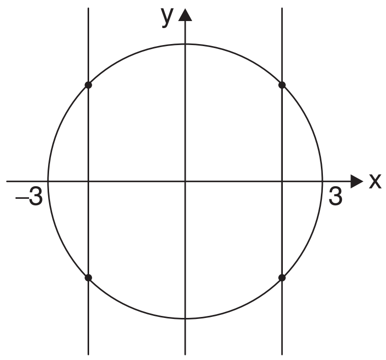
08) **Resposta**: 04

Resolução

A equação $x^2 + y^2 = 9$ é a equação de uma circunferência de centro na origem e raio 3.
A equação $x^2 - 3 = 0$ é a equação de um par de retas verticais paralelas, pois o coeficiente de **y** é zero.

Observe o desenvolvimento:
$x^2 + 0y - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

Graficamente, temos:

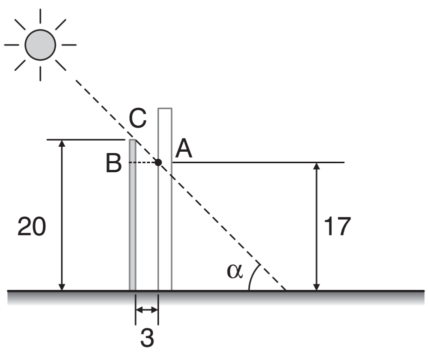


Portanto, há 4 pontos de intersecção.

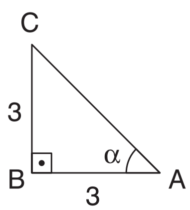
09) **Resposta**: 05

Comentário e resolução

01. **Correta**. Observe a figura.



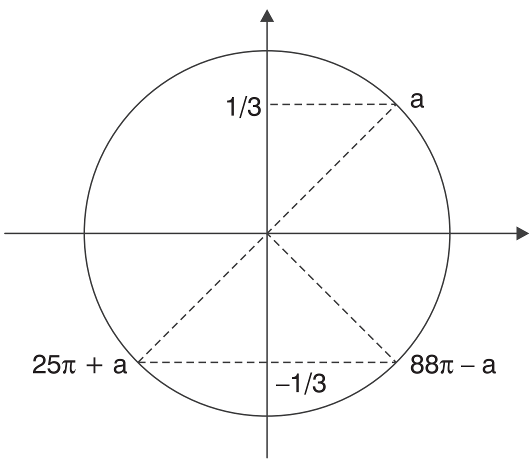
Ampliando o triângulo ABC, temos:



Trata-se de um triângulo retângulo e isósceles.
Portanto, a inclinação dos raios solares é $\alpha = 45°$.

02. **Incorreta**.

$\text{sen } a = \dfrac{1}{3}$ (Vamos considerar a ∈ 1ºQ).



Portanto, $\text{sen }(25\pi + a) = -\text{sen } a = -\dfrac{1}{3}$ e

$\text{sen }(88\pi - a) = -\text{sen } a = -\dfrac{1}{3}$.

Substituindo na expressão, obtemos:

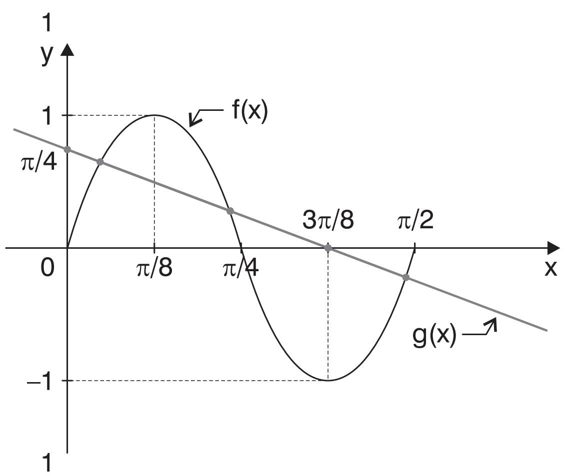
$\text{sen }(25\pi + a) - \text{sen }(88\pi - a) = \dfrac{2}{3}$

$\left(-\dfrac{1}{3}\right) - \left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$

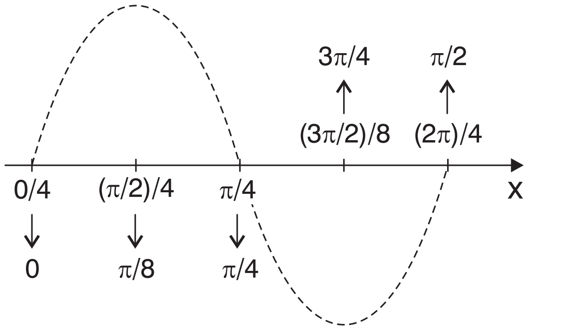
$0 = \dfrac{2}{3}$ (falso)

04. **Correta**. Para encontrarmos os pontos de intersecção devemos fazer os gráficos de f(x) = sen (4x) e

$g(x) = -\dfrac{2x}{3} + \dfrac{\pi}{4}$.



Há três pontos em comum no intervalo $(0, \dfrac{\pi}{2})$.



08. **Incorreta.**

$(\text{tg } x) \,.\, (\sec x) < 0 \Rightarrow \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} < 0 \Rightarrow$

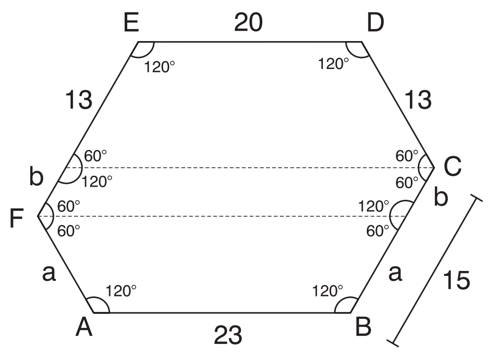
$\Rightarrow \dfrac{\text{sen } x}{\cos^2 x} < 0 \Rightarrow \text{sen } x < 0$

x ∈ 3º Q ou x ∈ 4º Q.

10) **Resposta**: 99

Resolução

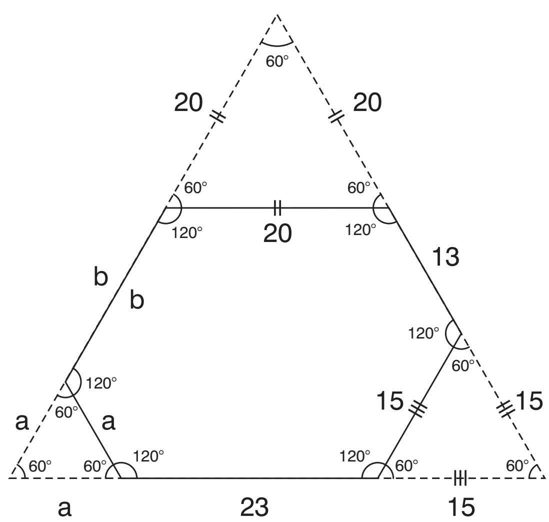
Modo 1

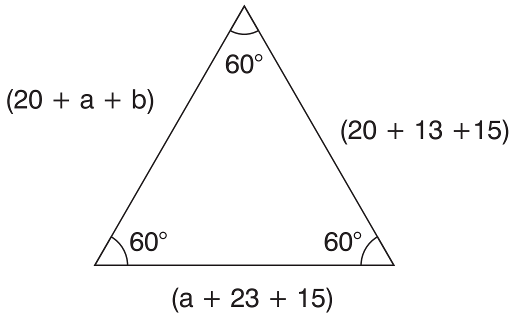


Perímetro = 23 + a + b + 13 + 20 + 13 + a + b
(Como a + b = 15)

Perímetro = 23 + 15 + 13 + 20 + 13 + 15
2P = 99

Modo 2





$(20 + 13 + 15) = a + 23 + 15$
$48 = a + 38$
$a = 10$

$(20 + 13 + 15) = (20 + a + b)$
$48 = 20 + 10 + b$
$b = 18$

$2P = a + b + 20 + 13 + 15 + 23$
$2P = 10 + 18 + 20 + 13 + 15 + 23$
$2P = 99$