21) **Resposta**: 38

**Comentário**

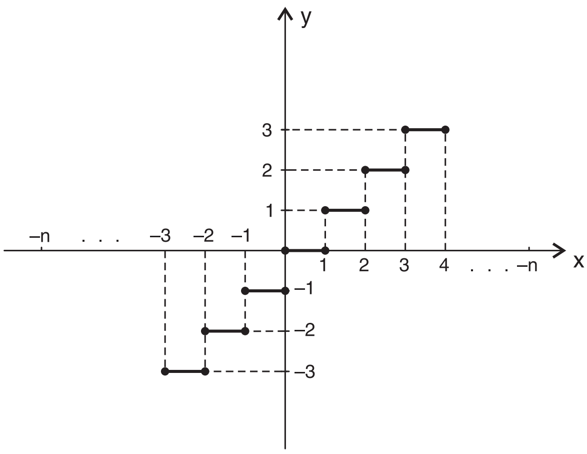
01. **Incorreta**. $f(0,3) = f(0,4) = 0$

02. **Correta**. $m < 0 \Rightarrow m - \frac{1}{2} < 0$

$$\Rightarrow m - 1 < m - \frac{1}{2} < m$$

Logo, $f\left(m - \frac{1}{2}\right) = m - 1$

04. **Correta**. Pela função $f(x) = x \quad \forall x \in z$
08. **Incorreta**. $Im(f) = z$
16. **Incorreta**. $f(0,5) = 0$, mas $f(-0,5) = -1$
32. **Correta**. Veja o exemplo:




De –3 a 3 a soma das áreas é:

$S = 3 + 2 + 1 + 1 + 2$

De –5 a 5, teremos:

$S = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 2 + 3 + 4$

Logo, de –n a n, teremos $S = n + 2 \,.\, [1 + 2 + 3 + ... + n - 1]$

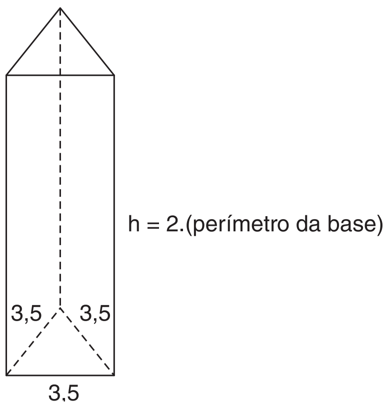
$$S = n + \cancel{2} \,.\, \frac{(1 + n - 1)\,.\,n - 1}{\cancel{2}}$$

$S = n + n^2 - n$
$S = n^2$

22) **Resposta**: 15

**Comentário**

01. **Correta**.



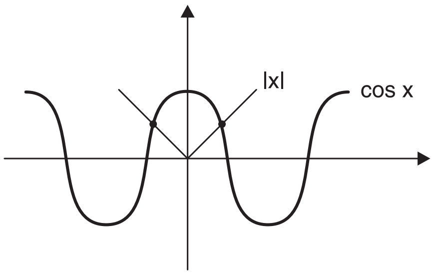

Perímetro da base = 10,5
h = 21

$S_\ell = 3 \,.\, 3{,}5 \,.\, 21$
$S_\ell = 220{,}5\ cm^2$

02. **Correta**.

$f(x) = |x| - \cos x$
raízes: $|x| = \cos x$

Graficamente,




Como os gráficos se interceptam em dois pontos, a equação $|x| = \cos x$ possui duas raízes reais.

04. **Correta**. A . B não é inversível, pois:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 2 \\ 2 & 10 & 0 \\ 1 & -10 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det (A . B) = \begin{vmatrix} -7 & -5 & 2 \\ 2 & 10 & 0 \\ 1 & -10 & -1 \end{vmatrix} = 70 - 40 + 0 - 20 - 0 - 10 = 0$$
$$\begin{matrix} -7 & -5 & 2 \\ 2 & 10 & 0 \end{matrix}$$

Como $\det (A . B) = 0$, então (AB) não é inversível.

08. **Correta**.
$M = C . (1 + i)^t$
$M_3 = 10000 . (1 + 0{,}01)^3$
$M_3 = 10000 . (1{,}01)^3$
$M_3 = 10000 . 1{,}030301$
$M_3 = 10303{,}01$

16. **Incorreta**. $\text{tg} \dfrac{23\pi}{4} + \sec \dfrac{14\pi}{3} = -1$

Cálculo da MDP
$$\frac{23\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}$$
$$\frac{14\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$$

Portanto:
$$\text{tg} \frac{7\pi}{4} + \sec \frac{2\pi}{3}$$
$(-1) + (-2) = -3$

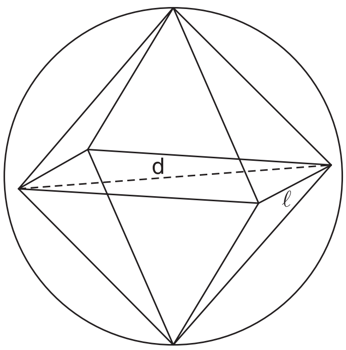
32. **Incorreta**. $\log_2 (\cos x) = 1 \rightarrow \cos x = 2$

Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, não existe solução.

23) **Resposta**: 15

**Comentário**

01. **Correta**.




R = 6

A diagonal **d** corresponde ao diâmetro da esfera.

$d = 2R$

$\ell\sqrt{2} = 2 \cdot 6$

$\ell\sqrt{2} = 12$

$\ell = \dfrac{12}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\ell = 6\sqrt{2}$

O volume do octaedro regular pode ser calculado como o volume de duas pirâmides:

$V = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot S_b \cdot H$

$S_b$ = área da base
H = altura

$S_b = \ell^2$ $\quad$ $H = R$

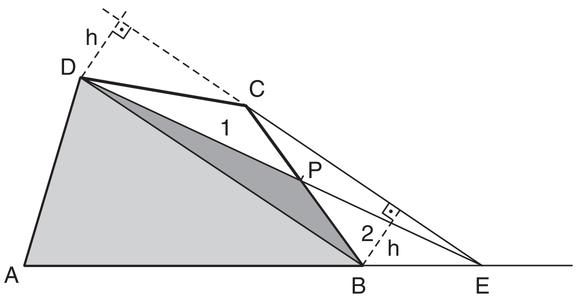
$S_b = (6\sqrt{2})^2$ $\quad$ $H = 6$

$S_b = 72$

$V = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 72 \cdot 6$

$V = 288$

02. **Correta**.



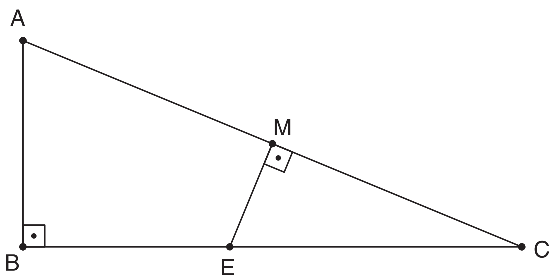

BD//EC

Provar que $A_{ABCD} = A_{ADE}$

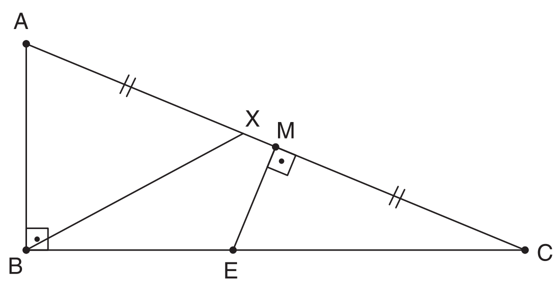
Como a região $A_{DPB}$ é comum, vamos provar que $A_1 = A_2$.

Considere os triângulos $\Delta_{ECB}$ e $\Delta_{ECD}$, observe que possuem a mesma base $\overline{EC}$ e que suas alturas são a distância entre os segmentos paralelos $\overline{BD} // \overline{EC}$, assim $A_{ECB} = A_{ECD}$. Como $\Delta_{ECB}$ e $\Delta_{ECD}$ possuem a região ECP em comum, temos que $A_1 = A_2$.

04. **Correta**.

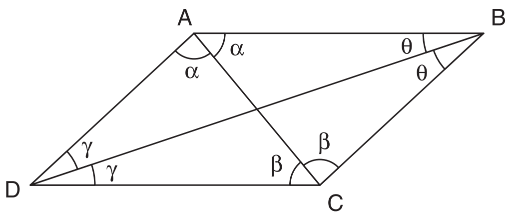



Traçando uma mediana a partir de B em AC:




Temos uma propriedade que segundo a qual a mediana divide o triângulo ABC em dois triângulos de mesma área: S (ΔABX) = S (ΔBXC), portanto, a área de EMC é menor que a metade da área total.

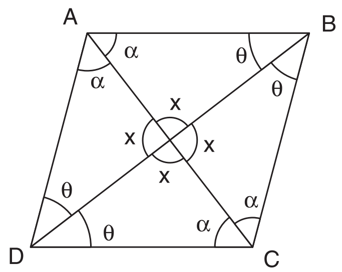
08. **Correta**. Considere o quadrilátero ABCD




Em ABD, $2\alpha + \theta + \gamma = 180°$
Em BCD, $2\beta + \theta + \gamma = 180°$

Logo, $2\alpha = 2\beta$
$\alpha = \beta$

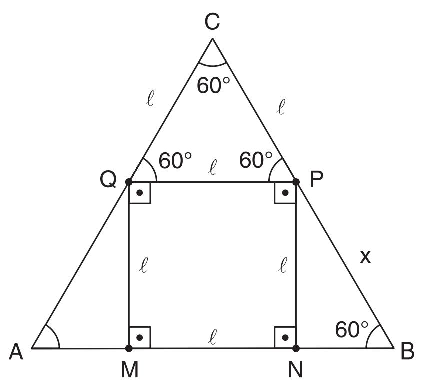
Daí concluímos que $\gamma = \theta$.




Como $4x = 360°$
$x = 90°$

Assim, as diagonais são perpendiculares.
Além disso, ABP e APD são semelhantes com um lado em comum. Logo são congruentes. Daí concluímos que $\overline{PB} = \overline{PB}$ e $\overline{AB} = \overline{PC}$. Com diagonais perpendiculares no ponto médio, temos um losango.

16. **Incorreta**.




Em CQP, temos $\overline{QP} = \overline{PC} = \overline{CQ} = \ell$.
Em PBN, sen $60° = \dfrac{\ell}{x}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell}{x}$$
$$x = \frac{2\ell}{\sqrt{3}}$$

Como $x \neq \ell$, P não é ponto médio.

24) **Resposta**: 28

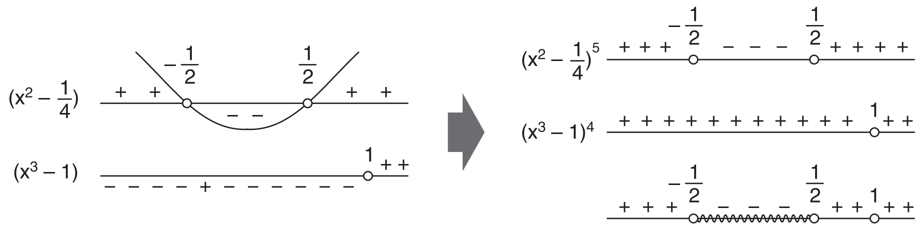
**Comentário**

Descontos sucessivos de 10% e 20%.
Valor inicial: **x**
Desconto de 10% ⇒ Novo valor 90%x
Desconto de 20% ⇒ Novo valor 80%(90%x) = 72%x
Desconto acumulado de 28%

25) **Resposta**: 53

**Comentário**

01. **Correta**.




$$S = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$

02. **Incorreta**. $2\sqrt{5} < 2 + \sqrt{6}$, elevando-se ambos os membros ao quadrado:

$(2\sqrt{5})^2 < (2 + \sqrt{6})^2$
$20 < 4 + 4\sqrt{6} + 6$
$20 < 10 + 4\sqrt{6}$
$10 < 4\sqrt{6} \Rightarrow$ elevando ao quadrado:
$10^2 < (4\sqrt{6})^2$
$100 < 96$

04. **Correta**. Observe que:

$1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$\vdots$
$1000^2 = 1\,000\,000$

Portanto, existem 1000 naturais quadrados perfeitos de 1 a 1 000 000.

08. **Incorreta**.

$$\frac{\sqrt{0{,}999...} + \sqrt{0{,}444...}}{1 + 0{,}424242...} = \frac{\sqrt{\frac{9}{9}} + \sqrt{\frac{4}{9}}}{1 + \frac{42}{99}}$$

$$\frac{1 + \frac{2}{3}}{\frac{99 + 42}{99}} = \frac{\frac{3+2}{3}}{\frac{141}{99}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{141}{99}} = \frac{5}{\cancel{3}} \cdot \frac{\overset{11}{\cancel{\overset{33}{\cancel{99}}}}}{\underset{47}{\cancel{141}}} = \frac{55}{47}$$

16. **Correta**. Observe o que ocorre numa sequência mais curta.
$(1^1 . 1!) . (2^2 . 2!) . (3^3 . 3!)$
$\overset{\frown}{1} . \overset{\frown}{1} . \overset{\frown}{2} . \overset{\frown}{2} . \overset{\frown}{2} . 1 . \overset{\frown}{3} . \overset{\frown}{3} . \overset{\frown}{3} . 3 . 2 . 1$
$(1 . 2 . 3) . (1 . 2 . 3) . (1 . 2 . 3) . (1 . 2 . 3)$
$(3!)^4$

O raciocínio é análogo para $(1^1 . 1!) . (2^2 . 2!) . ... . (10^{10} . 10!) = (10!)^{11}$

32. **Correta**. Observe que para **a** e **b** $\in$ R, **a** e **b** positivos.
$(a - b)^2 \geq 0$
$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$
$a^2 + b^2 \geq 2\,ab \quad \div(ab)$
$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

26) **Resposta**: 26

**Comentário**

01. **Incorreta.** Resto da divisão de P(x) por x + k
    Pelo teorema do resto temos: resto = P(–k).

02. **Correta**. $P(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$.

    Se $1 + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 = 0$, então $P(1) = 1 + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 = 0$.

04. **Incorreta.** Dois polinômios são idênticos quando os termos de mesmo grau possuem os mesmos coeficientes, e não por possuírem as mesmas raízes.
    Se: $P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + ... + a_n$
    $m(x) = b_1x^n + b_2x^{n-1} + ... + b_n$

    Então: $P(x) \equiv m(x) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_n = b_n \end{cases}$

08. **Correta**. $\begin{array}{l|l} P(x) & K(x) \\ \cline{2-2} 0 & Q(x) \end{array}$

    $P(x) = K(x) \cdot Q(x)$

    Se $\alpha$ é raiz de K(x), então:

    $P(\alpha) = K(\alpha) \cdot Q(x)$
    $P(\alpha) = 0 \cdot Q(x)$
    $P(\alpha) = 0$

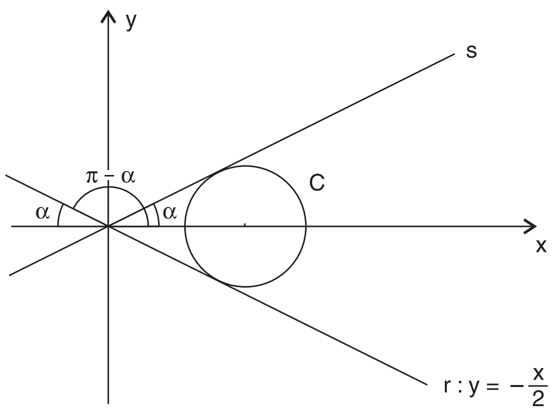
    Isto é, $\alpha$ é raiz de P(x).

16. **Correta**.

27) **Resposta**: 15

**Comentário**

01. **Correta**.




$m_r = tg\,(\pi - \alpha) \pm -\frac{1}{2}$

$m_s = tg\,\alpha = -tg(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}$

Logo, a equação de **s** é $y = \frac{x}{2}$.

02. **Correta**. Se (a, b) pertence à reta $2x - y = 0 \Rightarrow 2a - b = 0$

$$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right\| = 5 \Rightarrow S = \frac{1}{2}\left|(1 + 3b - a - b)\right| = 5$$

$$|2b - a + 1| = 10 \begin{cases} 2b - a + 1 = 10 \Rightarrow 2b - a = 9 \\ 2b - a + 1 = 10 \Rightarrow 2b - a = -11 \end{cases}$$

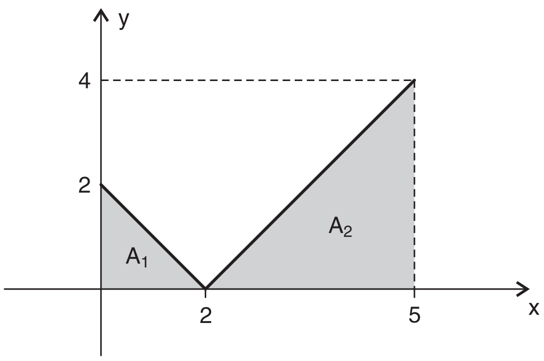
$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 0 \\ 2b - a = 9 \end{cases} \cdot 2 \qquad \text{ou} \qquad 2 \begin{cases} 2a - b = 0 \\ 2b - a = -11 \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| $3b = 18$ | $3b = -22$ |
| $b = 6$ | $b = -\frac{22}{3}$ |
| $2a = 6$ | $2a = b$ |
| $a = 3$ | $2a = -\frac{22}{3}$ |
| $(3, 6) = (a, b)$ | $a = -\frac{11}{3}$ |
| $a + b = 9$ | |

$$\left(-\frac{11}{3}, -\frac{22}{3}\right) = (a, b)$$

Mas o ponto (a, b) $\in$ 1º quadrante. Portanto, $(3, 6) = (a, b) \Rightarrow a + b = 9$.

04. **Correta**. $f: [0, 5] \to R$, $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & 0 \le x \le 2 \\ \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}, & 2 < x \le 5 \end{cases}$




$S = A_1 + A_2$
$S = 2 + 6$
$S = 8$ u.a.

08. **Correta**.
$C_1 \to R_1 = 9$ cm
$C_2 \to R_2 = 4$ cm
$C_3 \to R_3 = 1$ cm

Logo:
$$R_4 = \frac{R_1 - R_2}{2} = \frac{9 - 4}{2} = 2{,}5 \text{ cm}$$

Portanto:
$d(C_3, C_4) = R_3 + R_4 = 1 + 2{,}5 = 3{,}5$ cm

16. **Incorreta**.

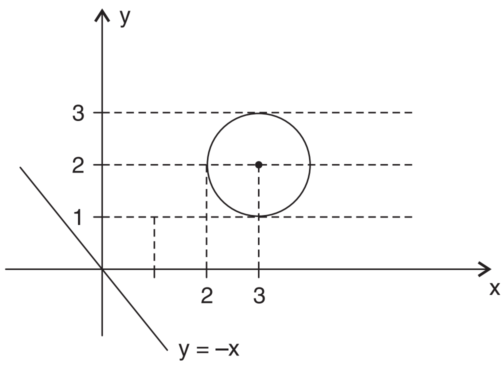
$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$

C(3, 2)

$9 + 4 - R^2 = 12$

R = 1

Observe que se $b = -1 < \frac{3-\sqrt{3}}{4}$, então y = –x, que não tem ponto em comum com a circunferência.




De outro jeito:

y = bx

$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$

Substituindo, temos:

$x^2 + b^2x^2 - 6x - 4bx + 12 = 0$

$(1 + b^2)x^2 + (-6 - 4b)x + 12 = 0 \quad (*)$

Para que se tenha pelo menos um ponto em comum, a equação (*) deve ter $\Delta \geq 0$.

$(-6 - 4b)^2 - 4 \,.\, (1 + b^2) \,.\, 12 \geq 0$

$36 + 48b + 16b^2 - 48 - 48b^2 \geq 0$

$-32b^2 + 48b - 12 \geq 0 \quad (\div)\ -4$

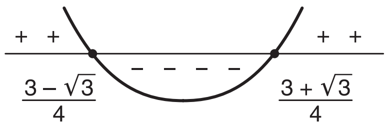
$8b^2 - 12b + 3 \leq 0$

$\Delta = 144 - 4 \,.\, 8 \,.\, 3 = 48$

$b = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{16}$

$b = \frac{12 \pm 4\sqrt{3}}{16}$

$b = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}$




Devemos ter $\frac{3-\sqrt{3}}{4} < b < \frac{3+\sqrt{3}}{4}$.

28) **Resposta**: 76

**Comentário**

01. **Incorreta**. A Copa ocorre de 4 em 4 anos, portanto, temos uma P.A.: {1950, 1954, 1958, ..., 2014}

$a_n = a_1 + (n - 1)R$

$2014 = 1950 + (n - 1) \,.\, 4$

$64 = (n - 1) \,.\, 4$

$n - 1 = \frac{64}{4}$

$n - 1 = 16$

$n = 17$

02. **Incorreta**.

$$\begin{cases} A + G = 45 \\ A = \frac{4}{5} \,.\, G \end{cases} \Rightarrow A = 45 - G$$

$45 - G = \frac{4}{5}G$

$225 - 5G = 4G$

$225 = 9G$

$G = 25$

04. **Correta**. log (log x) < 1

Condição de existência: x > 0
$\log x > 0 \Rightarrow x > 1$
$\log(\log x) < 1 \Rightarrow \log x < 10 \Rightarrow x < 10^{10}$
$\therefore 1 < x < 10^{10}$. Se $1 < x < 10^{10}$, então $x < 10^{10}$.

08. **Correta**.
$L(x) = -1120 + 148x - x^2$

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = \frac{-(148)}{2(-1)} = 74$$

16. **Incorreta**. $V_i = K \cdot r^4$

Reduzindo **r** à metade, o novo volume será:

$$V_f = K \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^4$$

$$V_f = K \cdot \frac{r^4}{16}$$

Isso significa que $V_f = \frac{V_i}{16}$.

32. **Incorreta**.

$$\begin{cases} x + py - z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

$$\text{com } p = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{2}{3}y - z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

Como o número de equações é menor que o número de variáveis, o sistema será indeterminado ou impossível.
Como as equações não são proporcionais, o sistema é impossível.

$$\frac{1}{3} \quad \frac{\frac{2}{3}}{2} \quad \frac{-1}{-3} \quad \frac{1}{4} \quad \text{ou perceba: } \begin{cases} x + \frac{2}{3}y - z = 1 \quad (3) \\ 3x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} \qquad \begin{cases} 3x + 2y - 3z = 3 \; (1) \\ 3x + 2y - 3z = 4 \; (2) \end{cases} \quad \text{Fazendo } (1) - (2)$$

0 = –1, o que é um absurdo.

64. **Correta**. $\frac{3136}{2541} \cong 1{,}234$

Logo, o aumento foi de 23,4%, aproximadamente.

29) **Resposta**: 20

**Comentário**

01. **Incorreta**. Espaço amostral:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{(1, 1)}$ | $\boxed{(1, 2)}$ | $\boxed{(1, 3)}$ | $\boxed{(1, 4)}$ | $\boxed{(1, 5)}$ | (1, 6) |
| $\boxed{(2, 1)}$ | $\boxed{(2, 2)}$ | $\boxed{(2, 3)}$ | $\boxed{(2, 4)}$ | $\boxed{(2, 5)}$ | (2, 6) |
| $\boxed{(3, 1)}$ | $\boxed{(3, 2)}$ | $\boxed{(3, 3)}$ | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| $\boxed{(4, 1)}$ | $\boxed{(4, 2)}$ | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| $\boxed{(5, 1)}$ | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |

Soma menor ou igual a 6

$$P = \frac{15}{36}$$

02. **Incorreta**. 986 $\overline{7} \,.\, \overline{6} \,.\, \overline{5} \,.\, \overline{4} \,.\, \overline{3} \,.\, \overline{2} = 5040$

04. **Correta**.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{100}$$

$$T_{51} = \binom{100}{50} x^{100-50} \,.\, \left(\frac{1}{x}\right)^{50}$$

$$T_{51} = \binom{100}{50} x^{50} \,.\, x^{-50}$$

$$T_{51} = \binom{100}{50}$$

08. **Incorreta**. $\{F, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$

F, __, __, __

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\ 3!} = 20$$

16. **Correta**.

$$M = \frac{40 \,.\, 39 \,.\, \dots \,.\, 10}{30!}$$

$$M = \frac{40 \,.\, 39 \,.\, \dots \,.\, \cancel{30} \,.\, \cancel{29} \,.\, \cancel{28} \,.\, \dots \,.\, \cancel{10}}{\cancel{30} \,.\, \cancel{29} \,.\, \cancel{28} \,.\, \dots \,.\, \cancel{10} \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, \dots \,.\, 2 \,.\, 1}$$

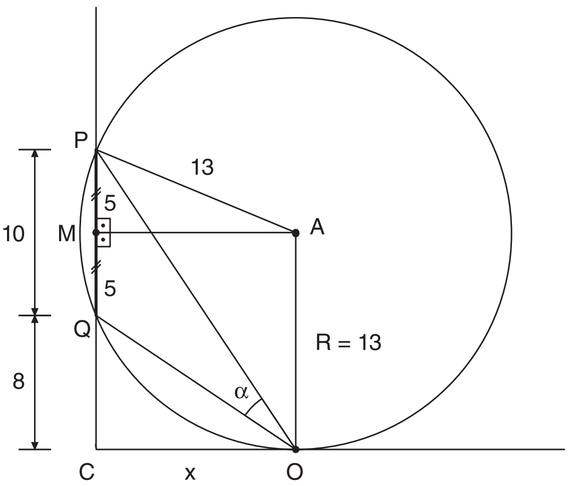
$$M = \frac{40 \,.\, \overset{13}{\cancel{39}} \,.\, 38 \,.\, 37 \,.\, \cancel{36} \,.\, \cancel{35} \,.\, 34 \,.\, \overset{11}{\cancel{33}} \,.\, \cancel{32} \,.\, 31}{\underset{3}{\cancel{9}} \,.\, \cancel{8} \,.\, \cancel{7} \,.\, \cancel{6} \,.\, \cancel{5} \,.\, \cancel{4} \,.\, \cancel{3} \,.\, \cancel{2} \,.\, 1}$$

$M = 40 \,.\, 13 \,.\, 38 \,.\, 37 \,.\, 34 \,.\, 11 \,.\, 31$, que é inteiro.

32. **Incorreta**. S O R T E
$P_5 - 2 \,.\, P_4 \Rightarrow 120 - 2 \,.\, (24) = 72$

30) **Resposta**: 12

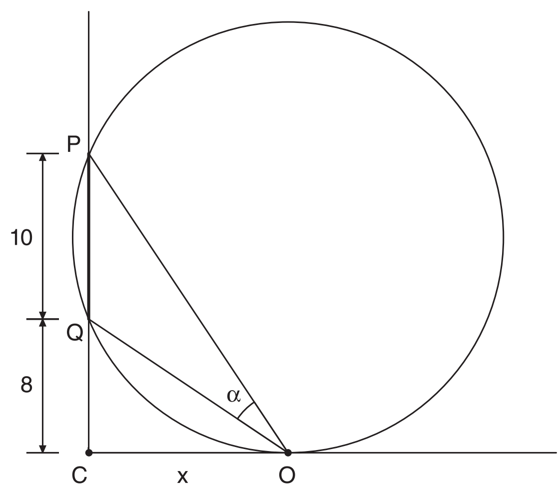
**Comentário**




Pitágoras

Em APM:
$\overline{AM} = 12$
Assim, x = 12

Outro jeito:




Usando potência de ponto COP:

$$(\overline{CO})^2 = (\overline{CP}) \,.\, (\overline{CQ})$$

$x^2 = 18 \,.\, 8$
$x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$