



# dicas do vestibular

## Matemática: Números Complexos

Material elaborado pelo professor Gilberto do Sistema de Ensino Energia.

### A história dos números complexos



Girolamo Cardano.

O matemático, físico e médico italiano Girolamo Cardano (1501-1576) publicou, em 1545, uma obra chamada *ARS magna*, que causou um profundo impacto nos matemáticos da época. A obra foi tão importante que acabou sendo considerada o marco inicial do período moderno da história da matemática.

Em sua obra, Cardano apresentou resoluções para equações de 3º e 4º graus e propôs uma fórmula para resolução das equações cúbicas do tipo  $x^3 + ax + b = 0$ .

$$x = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Em 1572, Raffaelli Bombelli (1526-1573) discutiu um problema interessante.

A equação  $x^3 - 15x - 4 = 0$  tinha como soluções estes valores:  $(4, -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3})$ .

Mas, utilizando-se a fórmula de Cardano, encontrava-se o seguinte:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Como  $\sqrt{-121}$  não é um número real, então Bombelli se propôs a encontrar os números **a** e **b** positivos tais que:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1} \text{ e } \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}$$

Feitos os cálculos, concluiu que  $a = 2$ ,  $b = 1$  e  $x = 4$ . Então Bombelli começou a operar com o símbolo  $\sqrt{-1}$ , da mesma forma que operava com os reais, e os matemáticos passaram a trabalhar com raízes quadradas negativas.

No século XVIII, Leonardo Euler (1707-1783) usou o símbolo **i** para representar  $\sqrt{-1}$ .



Carl Friedrich Gauss.

No século XIX, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Jean Robert Argand (1768-1822) criaram a representação geométrica dos números complexos no plano.

Os números complexos são usados na física e na tecnologia contemporânea (representação de circuitos elétricos e de ondas eletromagnéticas), na computação gráfica.



Rafael Bombelli.



Leonardo Euler.

### Números complexos

São números da forma  $z = a + bi$ , em que  $i^2 = -1$  ou  $i = \sqrt{-1}$  (unidade imaginária).

#### Potência de i

**i** possui somente quatro potências:  $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1$  e  $i^3 = -i$ .

Para se obterem potências de  $i^n$ , basta calcular  $i^r$ , em que **r** é o resto da divisão  $\frac{n}{4}$ .

Sendo  $z = a + bi$ , tem-se:

- conjugado  $\bar{z} = a - bi$ ;
- oposto  $-z = -a + bi$ ;
- simétrico  $-a + bi$ .

#### Igualdade de complexos

$$a + bi = c + di \quad a = c; b = d$$

#### Operações com complexos

##### Adição e subtração

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

##### Multiplicação

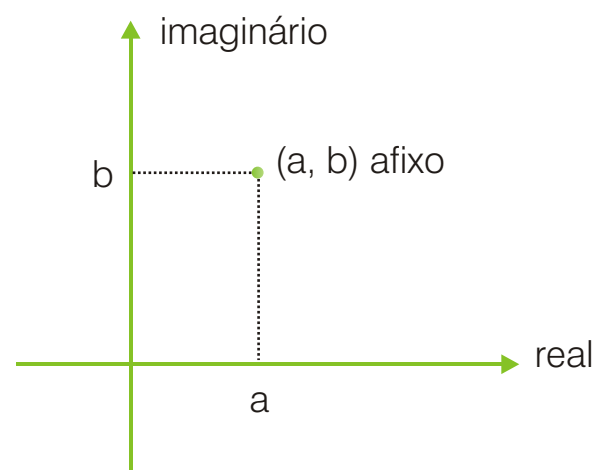
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

##### Divisão

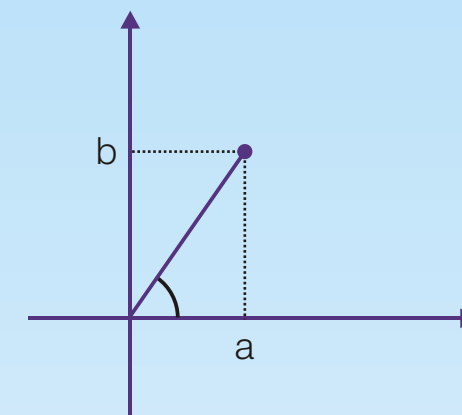
$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}}$$

#### Representação gráfica

$$z = a + bi = (a, b)$$



### Módulo de um número complexo ( $|z| = \dots$ )



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \text{argumento principal}$$

$$\arg |z| = \begin{cases} \cos = \frac{a}{|z|} \\ \text{sen} = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

$$0^\circ \quad 2\pi$$



### Forma trigonométrica (polar)

$$\text{Se } \begin{cases} \cos = \frac{a}{|z|} & a = |z| \cos \\ \text{sen} = \frac{b}{|z|} & b = |z| \text{sen} \end{cases}$$

Então de  $z = a + bi$  (forma algébrica), obtém-se:  
 $z = (|z| \cos \theta + i |z| \text{sen } \theta)$  forma trigonométrica

Com a forma trigonométrica, tem-se:

$$z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \text{sen}(n\theta))$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right), \text{ em que } k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

$$\text{Se } \begin{cases} z_1 = |z_1| (\cos \theta_1 + i \text{sen } \theta_1) \\ z_2 = |z_2| (\cos \theta_2 + i \text{sen } \theta_2) \end{cases}$$

Então:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \text{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \text{sen}(\theta_1 - \theta_2))$$

### Forma exponencial

$$Z = e^{i\theta}, \text{ em radianos}$$

