Matemática E – Extensivo – V. 8

Resolva

Aula 29

29.01) D

$2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$

$x = 2$ é raiz.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & 1 & -7 & -6 \\ \hline & 2 & 5 & 3 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 + 5x + 3$

Resolvendo $Q(x) = 0$, temos:

$x' = -1;\ x'' = -\dfrac{3}{2}$

29.02) $P(x) = x^3 - x^2 + x + a$

$P(1) = 0$

$1 - 1 + 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$

$P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

Como 1 é raiz, usamos Briott-Rufinni.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 + 1$

Resolvendo $Q(x) = 0$, obtemos:

$x' = i;\ x'' = -i$

$S = \{1, i, -i\}$

29.03) B

$x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$

$x_0 = 1$

$$\begin{array}{c|ccccc|l} 1 & 1 & -1 & -3 & 5 & -2 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 & \rightarrow R_1 = 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & & \rightarrow R_2 = 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & & & \rightarrow R_3 = 0 \\ \hline & 1 & 3 & & & & \rightarrow R_4 \neq 0 \end{array}$$

Como o resto foi nulo três vezes, $x_0 = 1$ é raiz tripla.

Aula 30

30.01) $x^2 + px + q = 0$

Se $1 + 4i$ é raiz, então $1 - 4i$ também é.

$\text{Soma} = -\dfrac{b}{a} = -p$

$-p = 1 + 4i + 1 - 4i$

$-p = 2$

$p = -2$

$\text{Produto} = \dfrac{c}{a} = q$

$q = (1 + 4i) \cdot (1 - 4i)$

$q = 1 + 16$

$q = 17$

Logo, $q - p = 17 - (-2) = 19$

30.02) C

$x^3 - 6x^2 - m^2x + 30 = 0$

$x_1 + x_2 = 1$

Soma

$\underbrace{x_1 + x_2} + x_3 = 6$

$1 + x_3 = 6$

$x_3 = 5$

Substituindo, temos:

$125 - 6 \cdot 25 - m^2 \cdot 5 + 30 = 0$

$125 - 150 - 5m^2 + 30 = 0$

$-5m^2 = -5$

$m^2 = 1$

$m = \pm 1$

30.03) $x^3 - 7x^2 + mx - 8 = 0$

a) Raízes: P.G. $\left(\dfrac{x}{q}, x, xq\right)$

Produto: $\dfrac{x}{\cancel{q}} \cdot x \cdot x\cancel{q} = 8$

$x^3 = 8$

$x = 2$

Substituindo, encontramos:

$8 - 28 + 2m - 8 = 0$

$2m = 28$

$m = 14$

b) Equação

$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$

$x = 2$ é raiz.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -7 & 14 & -8 \\ \hline 2 & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 - 5x + 4$

Raízes:

$x = 2,\ x = 1$ e $x = 4$

Aula 31

31.01) a) $2x^3 - x^2 - 6x + 3 = 0$

Raiz racional $\frac{p}{q}$

p é divisor de 3.
q é divisor de 2.
p = 1, –1, 3, –3
q = 1, –1, 2, –2

Possíveis raízes: $\frac{p}{q} = 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$

Pesquisando, encontramos a raiz $x = \frac{1}{2}$.

1/2	2	–1	–6	3
	2	0	–6	0

$Q(x) = 2x^2 - 6$
Resolvendo Q(x) = 0, temos:

$x = \pm\sqrt{3}$

$S = \left\{\frac{1}{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\right\}$

b) $3x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 20x - 8 = 0$
p divide –8.
q divide 3.
p = 1, –1, 2, –2, 4, –4, 8, –8
q = 1, –1, 3, –3
Possíveis raízes:

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm\frac{1}{3}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm 4, \pm\frac{4}{3}, \pm 8, \pm\frac{8}{3}$

Procurando, encontramos x = –2 como raiz.

–2	3	5	10	20	–8
	3	–1	12	–4	0

$Q(x) = 3x^3 - x^2 + 12x - 4$
Vamos aplicar o mesmo teorema para obter as raízes de Q(x).
p divide –4.
q divide 3.
$p = \pm 1, \pm 2, \pm 4$
$q = \pm 1, \pm 3$

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm\frac{1}{3}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm 4, \pm\frac{4}{3}$

Pesquisando, achamos a raiz $x = \frac{1}{3}$.

1/3	3	–1	12	–4
	3	0	12	0

$\underbrace{\qquad\qquad}_{P(x) = 3x^2 + 12}$

Resolvendo, obtemos:
$3x^2 + 12 = 0$
$3x^2 = -12$
$x^2 = -4$
$x = \pm 2i$

$S = \left\{-2, \frac{1}{3}, 2i, -2i\right\}$

31.02) $P(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & -3 \\ 2 & x & 1 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix}$

a) $P(x) = x^3 + 2 - 6 + 6x - x - 2x$
$P(x) = x^3 + 3x - 4$

b) Como o coeficiente de x^3 é 1, as possíveis raízes racionais são os divisores de –4, ou seja, $\pm 1, \pm 2$ e ± 4.
Procurando, encontramos a raiz x = 1.

1	1	0	3	–4
	1	1	4	0

$Q(x) = x^2 + x + 4$
Resolvendo Q(x) = 0, temos:
$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 4$
$\Delta = -15$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}\,i}{2}$

$S = \left\{1, \frac{-1 + \sqrt{15}\,i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{15}\,i}{2}\right\}$

Aula 32

32.01) $P(x) = x^3 - 6x - 40$

a) $P(0) = 0 - 0 - 40 = -40$

$P(5) = 125 - 30 - 40 = 55$

Como $p(0) \,.\, p(5) < 0$, $p(x)$ tem uma raiz real no intervalo (0, 5). Logo, tem uma raiz menor do que 5.

b) $x^3 - 6x - 40 = 0$

Pela pesquisa das raízes racionais, encontramos $x = 4$ como raiz.

4	1	0	–6	–40
	1	4	10	0

$Q(x) = x^2 + 4x + 10$

$\Delta = 16 - 4 \,.\, 1 \,.\, 10$

$\Delta = -24$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-24}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}\,i}{2}$$

$x = -2 \pm \sqrt{6}\,i$

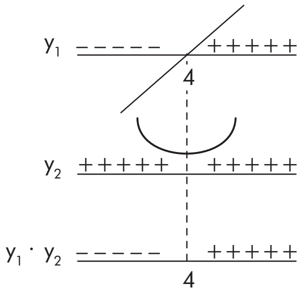
$S = \{4, -2 + \sqrt{6}\,i, -2 - \sqrt{6}\,i\}$

c) Pelo item **b**, temos:

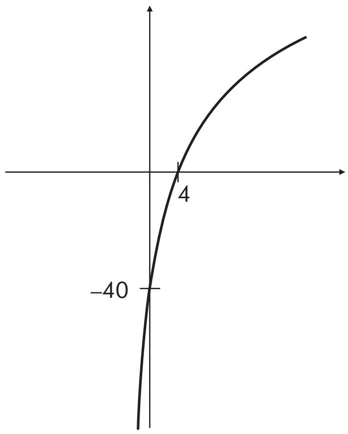
$P(x) = (x - 4) \,.\, (x^2 + 4x + 10)$

Vamos estudar o sinal de cada fator.

$y_1 = x - 4$ e $y_2 = x^2 + 4x + 10$



Assim, P(x) é negativo para $x < 4$ e positivo para $x > 4$. Além disso, o eixo **y** é cortado em $P(0) = -40$.



d) Inequação

$P(x) > 0$

Pelo item anterior, $P(x) > 0$ para $x > 4$.

32.02) D

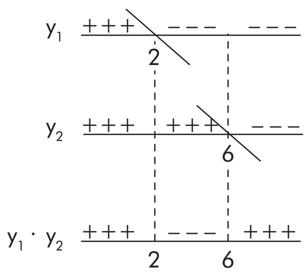
$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - k$

$f(1) = 1 - 2 + 3 - k = 2 - k$

$f(2) = 8 - 8 + 6 - k = 6 - k$

$f(1) \,.\, f(2) < 0$

$$\underbrace{(2 - k)}_{y_1} \,.\, \underbrace{(6 - k)}_{y_2} < 0$$



$2 < k < 6$

Testes

Aula 29

29.01) $x^3 - 12x^2 + 41x - 42 = 0$

2	1	–12	41	–42
	1	–10	21	0

$Q(x) = x^2 - 10x + 21$
$x' = 3; x'' = 7$
$S = \{2, 3, 7\}$

29.02) $x^3 - 3x^2 - 5x + 39 = 0$

–3	1	–3	–5	39
	1	–6	13	0

$Q(x) = x^2 - 6x + 13$
$\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 13$
$\Delta = -16$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm 4i}{2}$$

$x = 3 \pm 2i$
$S = \{-3, 3 \pm 2i\}$

29.03) $2x^3 - x^2 - 7x + 6 = 0$

1	2	–1	–7	6
	2	1	–6	0

$Q(x) = 2x^2 + x - 6$

$x' = -2; x'' = \frac{3}{2}$

$S = \left\{1, -2, \frac{3}{2}\right\}$

29.04) $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$

Testando os elementos do conjunto $\left\{1, -2, \frac{1}{2}\right\}$, encontramos x = 1 como raiz.

1	3	2	–7	2
	3	5	–2	0

$Q(x) = 3x^2 + 5x - 2$

$x' = -2; x'' = \frac{1}{3}$

$S = \left\{1, -2, \frac{1}{3}\right\}$

29.05) $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$

1	1	–2	2	–1
	1	–1	1	0

$Q(x) = x^2 - x + 1$
$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$S = \left\{1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right\}$$

29.06) C
$2x^3 - x^2 + kx + t = 0$
Substituindo, obtemos:
$x = -2 \Rightarrow -16 - 4 - 2k + t = 0$
$-2k + t = 20$
$x = 3 \Rightarrow 54 - 9 + 3k + t = 0$
$3k + t = -45$

$$\begin{cases} -2k + t = 20 & .(-1) \\ 3k + t = -45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2k - \cancel{t} = -20 \\ 3k + \cancel{t} = -45 \end{cases} \oplus$$

$5k = -65$
$k = -13$
$t = -6$
Substituindo na equação, temos:
$2x^3 - x^2 - 13x - 6 = 0$
Usando as raízes –2 e 3, baixamos o grau por Ruffini:

–2	2	–1	–13	–6
3	2	–5	–3	0
	2	1	0	

$Q(x) = 2x + 1$
$2x + 1 = 0$

$x = -\frac{1}{2}$

29.07) $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$

–1	1	1	–3	–3
	1	0	–3	0

$Q(x) = x^2 - 3$
$x' = \sqrt{3}; x'' = -\sqrt{3}$
$S = \{-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

29.08) $x^3 - 7x + 6 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 + x - 6$
$x' = -3;\ x'' = 2$
$S = \{1, -3, 2\}$

29.09) $4x^4 - 20x^3 + 35x^2 - 25x + 6 = 0$

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 4 & -20 & 35 & -25 & 6 \\ \hline 1/2 & 4 & -16 & 19 & -6 & 0 \\ \hline & 4 & -14 & 12 & 0 & \end{array}$$

$Q(x) = 4x^2 - 14x + 12$
$4x^2 - 14x + 12 = 0 \qquad \div 2$
$2x^2 - 7x + 6 = 0$

$x' = 2;\ x'' = \dfrac{3}{2}$

$S = \left\{1, \dfrac{1}{2}, 2, \dfrac{3}{2}\right\}$

29.10) $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 11x - 6$
-1 e 2 são raízes.

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 2 & -9 & 6 & 11 & -6 \\ \hline 2 & 2 & -11 & 17 & -6 & 0 \\ \hline & 2 & -7 & 3 & 0 & \end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 - 7x + 3$

$x' = 3;\ x'' = \dfrac{1}{2}$

$S = \left\{-1, 2, 3, \dfrac{1}{2}\right\}$

$P(x) = 2(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot \left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

29.11) D
$P(x) = x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
Se **i** é raiz, então $-i$ também é. Assim
$(x - i) \cdot (x + i) = x^2 + 1$ é um fator de $P(x)$.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^4} - 3x^2 - 4 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} \underline{\cancel{-x^4} - x^2} & x^2 - 4 \\ -4x^2 - 4 & \\ \underline{\ \ 4x^2 + 4} & \\ \quad 0 & \end{array}$$

Resolvendo $x^2 - 4 = 0$, obtemos $x = \pm 2$.
$S = \{\pm i, \pm 2\}$

29.12) $P(x) = x^3 + mx^2 + x - 6$
a) 1 é raiz $\Rightarrow P(1) = 0$
$1 + m + 1 - 6 = 0$
$m = 4$

b) $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 + 5x + 6$
$x' = -2;\ x'' = -3$
$S = \{1, -2, -3\}$
$P(x) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$

29.13) $x^3 + 1 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 - x + 1$
$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

$S = \left\{-1, \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}\right\}$

29.14) $P(x) = 9x^3 - 36x^2 + 29x - 6$
$P(x)$ é divisível por $x - 3$.
$\Leftrightarrow P(3) = 0$
$\Leftrightarrow$ 3 é raiz.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 9 & -36 & 29 & -6 \\ \hline & 9 & -9 & 2 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = 9x^2 - 9x + 2$

$x' = \dfrac{2}{3};\ x'' = \dfrac{1}{3}$

$S = \left\{3, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right\}$

29.15) C
$P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$
Se $2x - 1$ é um fator de $P(x)$, então a raiz de $2x - 1$ $\left(x = \dfrac{1}{2}\right)$ também é raiz de $P(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc} 1/2 & 2 & -11 & 17 & -6 \\ \hline & 2 & -10 & 12 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 - 10x + 12$
$2x^2 - 10x + 12 = 0 \qquad \div 2$
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$x' = 2;\ x'' = 3$

$S = \left\{\dfrac{1}{2}, 2, 3\right\}$

Maior raiz: $x = 3$

29.16) C

$x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$

1	1	–1	–3	5	–2	
1	1	0	–3	2	0	→ $R_1 = 0$
1	1	1	–2	0		→ $R_2 = 0$
1	1	2	0			→ $R_3 = 0$
	1	3				→ $R_4 \neq 0$

Como obtivemos três restos nulos, a multiplicidade da raiz x = 1 é três.

29.17) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16 = 0$

2	1	–4	8	–16	16
2	1	–2	4	–8	0
	1	0	4	0	

$Q(x) = x^2 + 4$

$x' = -2i;\ x'' = 2i$

$S = \{2, -2i, 2i\}$

29.18) $x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 64 = 0$

4	1	–12	52	–96	64
4	1	–8	20	–16	0
	1	–4	4	0	

$Q(x) = x^2 - 4x + 4$

$x' = x'' = 2$

$S = \{4, 2\}$

29.19) $x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = 0$

–1	1	0	–6	–8	–3
–1	1	–1	–5	–3	0
–1	1	–2	–3	0	
	1	–3	0		

$Q(x) = x - 3$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$S = \{-1, 3\}$

29.20) 07

01. **Correta**.

$P(x) = 2 - 3mx + x^2$

$P(-1) = 0$

$2 + 3m + 1 = 0$

$3m = -3$

$m = -1$

02. **Correta**.

$P(x) = x^n - a^n$

$P(a) = a^n - a^n = 0$

04. **Correta**.

$P(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x =$

$= x^3 . (x + 3) - x . (x + 3) =$

$= (x + 3) . (x^3 - x) =$

$= (x + 3) . (x) . (x^2 - 1) =$

$= x . (x + 3) . (x - 1) . (x + 1)$

$G(x) = x . (x - 1) . (x + 3)$

$$\frac{P(x)}{G(x)} = \frac{\cancel{x} . \cancel{(x+3)} . \cancel{(x-1)} . (x+1)}{\cancel{x} . \cancel{(x-1)} . \cancel{(x+3)}} = x + 1$$

08. **Incorreta**.

$x^3 - 10x^2 + 34x - 40 = 0$

Independentemente das raízes, a soma é $-\dfrac{b}{a} = 10$.

16. **Incorreta**.

$3x^3 - 2x^2 + (p - 1)x + p^2 - 1 = 0$

$p = 1$

$3x^3 - 2x^2 = 0$

$x^2 . (3x - 2) = 0$

$(x - 0) . (x - 0) . (3x - 2) = 0$

Zero é raiz dupla.

Aula 30

30.01) D

$x^2 - 4x - 7 = 0$

Soma: $x_1 + x_2 = 4$

Produto: $x_1 . x_2 = -7$

$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1 . x_2 + x_2^2$

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 . x_2 = x_1^2 + x_2^2$

$4^2 - 2 . (-7) = x_1^2 + x_2^2$

$30 = x_1^2 + x_2^2$

30.02) E

$ax^2 - 4x - 16 = 0$

Substituindo x = 4, temos:

$16a - 16 - 16 = 0$

$16a = 32$

$a = 2$

$2x^2 - 4x - 16 = 0 \qquad \div 2$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

Soma

$x' + x'' = 2$

$4 + x'' = 2$

$x'' = -2$

30.03) A

$ax^2 + ax + 1 = 0$

Seja **r** a raiz de multiplicidade 2.

Então:

$ax^2 + ax + 1 = a \,.\, (x - r)^2 =$

$= a \,.\, (x^2 - 2xr + r^2) =$

$= ax^2 - 2arx + ar^2 =$

$= -2\cancel{a}r = \cancel{a}$

$r = -\dfrac{1}{2}$

e

$ar^2 = 1$

$\dfrac{a}{4} = 1$

$a = 4$

30.04) C

$x^2 + bx + 12 = 0$

Raízes: x_1 e x_2

$x_1 \,.\, x_2 = 12$

$x_2 + \beta x + 12 = 0$

Raízes: x_1' e x_2'

$x_1' \,.\, x_2' = 12$

$x_1' + x_2' = -\beta$

$x_1 = x_1' + 7;\ x_2 = x_2' + 7$

$x_1 \,.\, x_2 = (x_1' + 7) \,.\, (x_2' + 7)$

$12 = x_1' x_2 + 7x_1' + 7x_2' + 49$

$\cancel{12} = \cancel{12} + 7 \,.\, (x_1' + x_2') + 49$

$0 = 7 \,.\, (-\beta) + 49$

$7\beta = 49 \Rightarrow \beta = 7$

30.05) B

$x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0$

$x^2 \,.\, (x - 1) + 3 \,.\, (x - 1) = 0$

$(x^2 + 3) \,.\, (x - 1) = 0$

$x^2 + 3 = 0$

$x^2 = -3$

$x = \pm \sqrt{3}\, i$

ou

$x - 1 = 0$

$x = 1$

$S = \{1, \pm \sqrt{3}\, i\}$

30.06) $2x^3 - 17x^2 + 32x - 12 = 0$

Raízes: $x_1, x_2, \dfrac{1}{2}$

$x_1 + x_2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{2}$

$x_1 + x_2 = \dfrac{17}{2} - \dfrac{1}{2}$

$x_1 + x_2 = \dfrac{16}{2}$

$x_1 + x_2 = 8$

30.07) C

$2x^3 - x^2 + kx + t = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{1}{2}$

$-2 + 3 + x_3 = \dfrac{1}{2}$

$x_3 = \dfrac{1}{2} - 1$

$x_3 = -\dfrac{1}{2}$

30.08) C

$x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$

$a + b + 5 = 6$

$a + b = 1$

30.09) C

$x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = 0$

$\text{Produto} = -\left(\dfrac{-20}{1}\right) = 20$

30.10) D

$9x^3 - 3x - 10 = 0$

Raízes: p, q , 2

Usando Ruffinni, obtemos:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 9 & 0 & -31 & -10 \\ \hline & 9 & 18 & 5 & 0 \end{array}$$

$9x^2 + 18x + 5 = 0$ tem **p** e **q** como raízes.

Soma: $p + q = -2$

Produto: $p \,.\, q = \dfrac{5}{9}$

$p + q = -2$

$(p + q)^2 = (-2)^2$

$p^2 + 2pq + q^2 = 4$

$p^2 + q^2 = 4 - 2pq$

$p^2 + q^2 = 4 - 2 \,.\, \dfrac{5}{9}$

$p^2 + q^2 = 4 - \dfrac{10}{9}$

$p^2 + q^2 = \dfrac{26}{9}$

30.11) Verdadeira.

$$\begin{vmatrix} x & x & x \\ 4 & x & x \\ 4 & 4 & x \end{vmatrix} = 0$$

$x^3 + \cancel{4x^2} + 16x - \cancel{4x^2} - 4x^2 - 4x^2 = 0$

$x^3 - 8x^2 + 16x = 0$

Soma: 8

30.12) E

$x^3 + mx^2 - 6x + 1 = 0$

Raízes opostas: $x_1 = r;\ x_2 = -r$

Soma: $-m$

$x_3 + r - r = -m$

$x_3 = -m$

Substituindo essa raiz na equação,

$-\cancel{m^3}+\cancel{m^3}+6m+1=0$

$m=-\dfrac{1}{6}$

30.13) $P(x) = x^3 - 3x^2 + m$

a) Raízes: P.A. $(x - r, x, x + r)$

Soma = 3

$x - \cancel{r} + x + x + \cancel{r} = 3$

$3x = 3$

$x = 1$

Substituindo em P(x), encontramos:

$1 - 3 + m = 0$

$m = 2$

b) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

Por Ruffinni, temos:

1	1	–3	0	2
	1	–2	–2	0

$x^2 - 2x - 2 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 12$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$

$x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

$x = 1 \pm \sqrt{3}$

$S = \{1, 1 \pm \sqrt{3}\}$

30.14) $x^3 - 12x^2 - 16x + 192 = 0$

Raízes: $x - r, x, x + r$

Soma = 12

$x - \cancel{r} + x + x + \cancel{r} = 12$

$3x = 12$

$x = 4$

Baixando o grau, obtemos:

4	1	–12	–16	192
	1	–8	–48	0

$x^2 - 8x - 48 = 0$

$x' = 12;\ x'' = -4$

$S = \{-4, 4, 12\}$

30.15) $x^3 - 9x^2 + 26x + a = 0$

Raízes: $x - 1, x, x + 1$

Soma = 9

$x - \cancel{1} + x + x + \cancel{1} = 9$

$3x = 9$

$x = 3$

Substituindo na equação, encontramos:

$27 - 9 \cdot 3^2 + 26 \cdot 3 + a = 0$

$27 - 81 + 78 + a = 0$

$a = -24$

30.16) D

$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

Raízes simétricas: $x_1 = r;\ x_2 = -r$

Soma: 3

$r - r + x_3 = 3$

$x_3 = 3$

30.17) C

$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$

Raízes: $x - r, x, x + r$

Soma = 9

$x - \cancel{r} + x + x + \cancel{r} = 9$

$3x = 9$

$x = 3$

Baixando o grau, temos:

3	1	–9	23	–15
	1	–6	5	0

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$x' = 1;\ x'' = 5$

$S = \{1, 3, 5\}$

Menor raiz: $x = 1$

30.18) C

$x^3 - 6x^2 + kx + 64 = 0$

Raízes: $\dfrac{x}{q}, x, xq$

Produto: –64

$\dfrac{x}{\cancel{q}} \cdot x \cdot x\cancel{q} = -64$

$x^3 = -64$

$x = -4$

Substituindo na equação, obtemos:

$-\cancel{64} - 6 \cdot 16 - 4k + \cancel{64} = 0$

$-96 = 4k$

$k = -24$

30.19) E

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

Raízes: $\dfrac{x}{q}, x, xq$

Produto: –c

$\dfrac{x}{\cancel{q}} \cdot x \cdot x\cancel{q} = -c$

$x^3 = -c$

$x = \sqrt[3]{-c}$

Substituindo na equação, encontramos:

$\left(\sqrt[\cancel{3}]{-c}\right)^{\cancel{3}} + a \cdot \left(\sqrt[3]{-c}\right)^2 + b \cdot \sqrt[3]{-c} + c = 0$

$-\cancel{c} + a\sqrt[3]{c^2} + b\sqrt[3]{-c} + \cancel{c} = 0$

$a\sqrt[3]{c^2} - b\sqrt[3]{c} = 0$

$a\sqrt[3]{c} \cdot \cancel{\sqrt[3]{c}} = b\cancel{\sqrt[3]{c}}$

$\sqrt[3]{c} = \dfrac{b}{a}$

$\left(\sqrt[3]{c}\right)^3 = \left(\dfrac{b}{a}\right)^3$

$c = \dfrac{b^3}{a^3}$

$a^3c - b^3 = 0$

30.20) 06

01. **Incorreta**.

$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x - 3$

Substituindo x = 1, temos:

$P(1) = 2 - 5 + \cancel{5} - \cancel{5} - 3 = -6$

Seria raiz se P(1) = 0

02. **Correta**.

$x^3 + ax^2 + bx + 3 = 0$

As relações de Girard são satisfeitas com 1, –1, 3.

$x_1 + x_2 + x_3 = -a$

$\cancel{1} - \cancel{1} + 3 = -a$

$a = -3$

$x_1 . x_2 + x_1 . x_3 + x_2 . x_3 = b$

$1 . (-1) + 1 . 3 + (-1) . 3 = b$

$-1 + \cancel{3} - \cancel{3} = b$

$b = -1$

$x_1 . x_2 . x_3 = 1 . (-1) . 3 = -3$

Conclusão: Se tomarmos a = –3 e b = –1, os números 1, –1 e 3 serão raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + 3 = 0$.

04. **Correta**.

$x^3 + 3x - 2$ tem grau ímpar e todos os coeficientes são reais.

08. **Incorreta**.

$f(x) = x^3 + mx - 5$

Para m = 4, encontramos:

$f(x) = x^3 + 4x - 5$

$f(3) = 27 + 12 - 5 \neq 0$

Logo f(x) não é divisível por x – 3.

30.21) E

$x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$

Se 1 + i é raiz, então 1 – i também é.

Raízes: $x_1 = 1 + i$; $x_2 = 1 - i$; $x_3 = r$

Relação de Girard:

$x_1 . x_2 + x_1 . x_3 + x_2 . x_3 = 2$

$(1 + i) . (1 - i) + (1 + i) . r + (1 - i) . r = 2$

$1 + 1 + r + \cancel{ri} + r - \cancel{ri} = 2$

$2r = 0$

$r = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = -m$

$1 + \cancel{i} + 1 - \cancel{i} = 0 = -m$

$m = -2$

$x_1 . x_2 . x_3 = -n$

$(1 + i) . (1 - i) . 0 = -n$

$n = 0$

30.22) B

$3x^3 - 14x^2 + mx - 10 = 0$

Raízes: $x_1 = 2 + i$; $x_2 = 2 - i$; $x_3 = r$

Usando Girard, obtemos:

$x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{14}{3}$

$2 + \cancel{i} + 2 - \cancel{i} + r = \dfrac{14}{3}$

$r = \dfrac{14}{3} - 4$

$r = \dfrac{2}{3}$

Substituindo $x = \dfrac{2}{3}$, encontramos:

$\cancel{3} . \dfrac{8}{27} - 14 . \dfrac{4}{9} + m . \dfrac{2}{3} - 10 = 0$

$\dfrac{8}{9} - \dfrac{56}{9} + \dfrac{2m}{3} - 10 = 0$

$\dfrac{8 - 56 + 6m - 90}{\cancel{9}} = \dfrac{0}{9}$

$6m = 138$

$m = 23$

30.23) C

$x^3 - 8px^2 + x - q = 0$

Raízes: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = r$

Utilizando Girard, temos:

$x_1 . x_2 + x_1 . x_3 + x_2 . x_3 = 1$

$1 . 1 + 1 . r + 1 . r = 1$

$2r = 0$

$r = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 8p$

$1 + 1 + 0 = 8p$

$p = \dfrac{1}{4}$

30.24) E

$x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$

Raízes: $x_1 = 2$; $x_2 = 2$; $x_3 = r$

Empregando Girard, obtemos:

$x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$2 + 2 + r = 5$

$r = 1$

$x_1 . x_2 . x_3 = -b$

$2 . 2 . 1 = -b$

$b = -4$

Substituindo x = 1, encontramos:

$1 - 5 + a + b = 0$

$-4 + a - 4 = 0$

$a = 8$

Logo, $\dfrac{b}{a} = \dfrac{8}{-4} = -2$

30.25) C

$P(x) = x^3 + Ax + 6750$

Raízes: $x_1 = p$; $x_2 = p$; $x_3 = q$

Usando Girard, obtemos:

$x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}$

$p + p + q = 0$

$2p + q = 0$

$q = -2p$

$x_1 . x_2 . x_3 = -\dfrac{d}{a}$

$p . p . q = -6750$

$p^2 . (-2p) = -6750$

$-2p^3 = -6750$

$p^3 = -3375$

$p = -15$

Logo, q = 30.

30.26) B

$2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 20x + 12 = 0$

Soma: $-\frac{b}{a} = -\frac{5}{2}$

30.27) B

$x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x = 0$

Soma: $-\frac{b}{a} = 1$

30.28) $17x^5 - 4x^3 + 9x^2 - 14x + 5 = 0$

Soma: $-\frac{b}{a} = 0$

30.29) B

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Raízes:

$x_1 = 2 - i$

$x_2 = 2 + i$

$x_3 = 3 + 2i$

$x_4 = 3 - 2i$

$x_1 . x_2 . x_3 . x_4 = d$

$(2 - i) . (2 + i) . (3 + 2i) . (3 - 2i) = d$

$5 . 13 = d$

$65 = d$

30.30) D

$2x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 2x - 4 = 0$

Raízes:

$x_1 = 1 - i$

$x_2 = 1 + i$

$\left.\begin{matrix} x_3 = p \\ x_4 = q \end{matrix}\right\}$ reais

$x_1 . x_2 . x_3 . x_4 = -\frac{4}{2}$

$(1 - i) . (1 + i) . p . q = -2$

$(1 + i) . p . q = -2$

$2p . q = -2$

$p . q = -1$

30.31) $x^3 - 2x^2 + 7x - 4 = 0$

Raízes: a, b, c

$a + b + c = 2$

$ab + ac + bc = 7$

$a . b . c = 4$

A nova equação, com raízes $x_1 = a + 1$; $x_2 = b + 1$; $x_3 = c + 1$, admitirá:

$x_1 + x_2 + x_3 = a + 1 + b + 1 + c + 1 =$

$= \underbrace{a + b + c} + 3 =$

$= 2 + 3$

$= 5$ (I)

$x_1 . x_2 + x_1 . x_3 + x_2 . x_3 =$

$= (a + 1) . (b + 1) + (a + 1) . (c + 1) + (b + 1) . (c + 1) =$

$= (ab + a + b + 1) + (ac + a + c + 1) + (bc + b + c + 1) =$

$= \underbrace{ab + ac + bc} + 2 . \underbrace{(a + b + c)} + 3 =$

$= 7 + 2 . 2 + 3 =$

$= 14$ (II)

$x_1 . x_2 . x_3 = (a + 1) . (b + 1) . (c + 1) =$

$= (ab + a + b + 1) . (c + 1) =$

$= abc + ab + ac + a + bc + b + c + 1 =$

$= \underbrace{abc} + \underbrace{ab + ac + bc} + \underbrace{a + b + c} + 1 =$

$= 4 + 7 + 2 + 1 =$

$= 14$ (III)

Usando I, II e III, criamos a equação:

$x^3 - 5x^2 + 14x - 14 = 0$

30.32) E

$P(x) = cx^3 + ax^2 + bx + 2c$

Raízes:

$x_1 = -1$

$x_2 = 1$

$x_3 = r$

$x_1 . x_2 . x_3 = -\frac{2\cancel{c}}{\cancel{c}}$

$-1 . 1 . x_3 = -2$

$x_3 = 2$

30.33) 14

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + d$

01. **Incorreto**.

$P(1) = 0$

$1 - 4 + 5 + d = 0$

$d = -2$

02. **Correto**.

Se $d = 0$, então:

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$

$x^3 - 4x^2 + 5x = 0$

$x . (x^2 - 4x + 5) = 0$

$x = 0$ ou $x^2 - 4x + 5 = 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4$

$x = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$

04. **Correto**.

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + d$

Raízes: a, b, c

Usando Girard, obtemos:

$ab + ac + bc = 5$

$S_t = 2 . (ab + ac + bc) =$

$= 2 . 5 =$

$= 10$

08. **Correto**.

Para $d = -1$, temos:

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

$P(1) = 1 - 4 + 5 - 1 = 1$

16. **Incorreto**.

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + d$

$$P(a-1) = \underbrace{(a-1)^3}_{} - 4 . \underbrace{(a-1)^2}_{} + 5 . \underbrace{(a-1)}_{} + d$$

independentemente de **a** $= -1 \quad -4 \quad -5 \quad +d$

$= -10 + d$

30.34) B

$4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$

$x_1 = i$

$x_2 = -i$

$x_3 = r$

Soma: $\frac{3}{4}$

$\cancel{i} - \cancel{i} + r = \frac{3}{4}$

$r = \frac{3}{4}$

30.35) Na equação $2x^3 - 30x^2 + 15x - 3 = 0$, temos: $a + b + c = 15$ e $abc = \frac{3}{2}$

Logo:

$\log\left[\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right] =$

$= \log\left[\frac{c+a+b}{abc}\right] =$

$= \log = \left[\frac{15}{\frac{3}{2}}\right]$

$= \log 10 =$

$= 1$

30.36) A

$x^3 - rx + 20 = 0$

Substituindo as raízes **a**, **b** e **c**, encontramos:

$$\begin{aligned} &a^3 - ra + 20 = 0 \\ &b^3 - rb + 20 = 0 \quad \oplus \\ &\underline{c^3 - rc + 20 = 0} \end{aligned}$$

$a^3 + b^3 + c^3 - r . (a + b + c) + 60 = 0$

$a^3 + b^3 + c^3 - r . 0 + 60 = 0$

$a^3 + b^3 + c^3 = -60$

30.37) $x^4 + 10x + 5 = 0$

Se **a**, **b**, **c** e **d** são raízes, então:

$$\begin{aligned} &a^4 + 10a + 5 = 0 \\ &b^4 + 10b + 5 = 0 \\ &c^4 + 10c + 5 = 0 \quad \oplus \\ &\underline{d^4 + 10d + 5 = 0} \end{aligned}$$

$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 10 . (a + b + c + d) + 20 = 0$

$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 10 . 0 = -20$

$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = -20$

Aula 31

31.01) D

$3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$

Possíveis raízes racionais:

p divide $-3 \Rightarrow p = \pm 1, \pm 3.$

q divide $3 \Rightarrow p = \pm 1, \pm 3.$

"Candidatos" a raízes:

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 3$

A única alternativa em que encontramos valores entre os "candidatos" é a **d**.

31.02) a) $x^3 - 2x - 4 = 0$

Como o coeficiente do termo dominante é 1, as possíveis raízes racionais são os divisores do termo independente: $\pm 1, \pm 2, \pm 4.$

Testando (por Ruffini), obtemos $x = 2$ como raiz.

2	1	0	–2	–4
	1	2	2	0

$x^2 + 2x + 2 = 0$

$\Delta = 4 - 4 . 1 . 2$

$\Delta = -4$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$x = \frac{-2 \pm 2i}{2}$

$x = -1 \pm i$

$S = \{2, -1 + i, -1 - i\}$

b) $x^3 - 7x + 6 = 0$

Pela mesma justificativa do item **a**, as possíveis raízes racionais são $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6.$

Pesquisando, encontramos a raiz $x = 1$.

1	1	0	–7	6
	1	1	–6	0

$x^2 + x - 6 = 0$

$x' = -3$

$x'' = 2$

$S = \{1, 2, -3\}$

c) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$
Pela mesma justificativa da letra **a**, as possíveis raízes racionais são:
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24.$
Procurando, achamos a raiz $x = 2$.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -9 & 26 & -24 \\ \hline & 1 & -7 & 12 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 7x + 12 = 0$
$x' = 3; x'' = 4$
$S = \{2, 3, 4\}$

d) $2x^3 + 11x^2 + 18x + 9 = 0$
p divide 9 $\Rightarrow$ $p = \pm 1, \pm 3, \pm 9.$
q divide 2 $\Rightarrow$ $p = \pm 1, \pm 2.$
Possíveis raízes racionais:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 9, \pm \frac{9}{2}$$

Pesquisando, encontramos a raiz $x = -1$.

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 2 & 11 & 18 & 9 \\ \hline & 2 & 9 & 9 & 0 \end{array}$$

$2x^2 + 9x + 9 = 0$

$x' = -3; x'' = -\frac{3}{2}$

$S = \left\{-1, -3, -\frac{3}{2}\right\}$

e) $(x - 2)^3 = 4 - x$
$x^3 - 3 \,.\, x^2 \,.\, 2 + 3 \,.\, x \,.\, 2^2 - 2^3 = 4 - x$
$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 4 - x$
$x^3 - 6x^2 + 13x - 12 = 0$
"Candidatos" a raízes racionais:
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12.$
Procurando, achamos $x = 3$ como raiz.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -6 & 13 & -12 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 3x + 4 = 0$
$\Delta = 9 - 4 \,.\, 1 \,.\, 4$
$\Delta = -7$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$

$S = \left\{3, \frac{3 \pm \sqrt{7}\,i}{2}\right\}$

31.03) a) $x^2 - 4x + 1 = 0$
$\Delta = 16 - 4 \,.\, 1 \,.\, 1$
$\Delta = 12$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$

$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

$x = 2 \pm \sqrt{3}$

$S = \{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$

b) $x^3 + 2x^2 - 4x = 0$
$x \,.\, (x^2 + 2x - 4) = 0$
$x = 0$ ou $x^2 + 2x - 4 = 0$
$\Delta = 4 - 4 \,.\, 1 \,.\, (-4)$
$\Delta = 20$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2}$

$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$

$x = -1 \pm \sqrt{5}$

$S = \{0, -1 + \sqrt{5}, -1 - \sqrt{5}\}$

c) $x^4 + x^2 - 12 = 0$
Substituição: $x^2 = y$
$y^2 + y - 12 = 0$
$y' = -4; y'' = 3$
$x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm 2i$
$x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3}$
$S = \{2i, -2i, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

31.04) B
$5x^3 - 15x^2 - 15x - 20 = 0 \qquad \div 5$
$x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = 0$
"Candidatos" a raízes racionais:
$\pm 1, \pm 2, \pm 4$
Pesquisando, encontramos $x = 4$ como raiz.

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & -3 & -3 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$x^2 + x + 1 = 0$
$\Delta = 1 - 4 \,.\, 1 \,.\, 1$
$\Delta = -3$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

$S = \left\{4, \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}\right\}$

31.05) B
$4x^3 - 3x + 1 = 0$
Pesquisa de raízes racionais:
p divide 1 $\Rightarrow$ $p = \pm 1.$
q divide 4 $\Rightarrow$ $q = \pm 1, \pm 2, \pm 4.$
Possíveis raízes:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$$

$x = -1$ é raiz.

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 4 & 0 & -3 & 1 \\ \hline & 4 & -4 & 1 & 0 \end{array}$$

$4x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{0}}{8}$

$x' = x'' = \dfrac{1}{2}$

$S = \left\{-1, \dfrac{1}{2}\right\}$

31.06) a) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$

Possíveis raízes racionais: ± 1

$x = 1$ é raiz.

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

$x^2 \cdot (x - 1) + x - 1 = 0$

$(x^2 + 1) \cdot (x - 1) = 0$

$x^2 + 1 = 0$

$x = \pm i$

ou

$x - 1 = 0$

$x = 1$

$S = \{1, i, -i\}$

b) $2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 20x - 12 = 0$

p divide 12 $\Rightarrow$ $p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

q divide 2 $\Rightarrow$ $q = \pm 1, \pm 2$.

"Candidatos" a raízes:

$\dfrac{p}{q} = \pm 1, \pm \dfrac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm \dfrac{3}{2}, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

$x = 1$ é raiz.

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 2 & -5 & -5 & 20 & -12 \\ \hline & 2 & -3 & -8 & 12 & 0 \end{array}$$

$2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$

$x^2 \cdot (2x - 3) - 4 \cdot (2x - 3) = 0$

$(x^2 - 4) \cdot (2x - 3) = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x = \pm 2$

ou

$2x - 3 = 0$

$x = \dfrac{3}{2}$

$S = \left\{1, 2, -2, \dfrac{3}{2}\right\}$

c) $x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$

"Candidatos" a raízes:

$\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$x = -1$ é raiz.

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & -1 & -4 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}$$

$x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$

$x^2 . (x - 2) - 2 \cdot (x - 2) = 0$

$(x^2 - 2) \cdot (x - 2) = 0$

$x^2 - 2 = 0$

$x = \pm \sqrt{2}$

ou

$x - 2 = 0$

$x = 2$

$S = \{-1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\}$

31.07) $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 11x - 6$

Pesquisa das raízes racionais:

p divide -6 $\Rightarrow$ $p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

q divide 2 $\Rightarrow$ $q = \pm 1, \pm 2$.

Possíveis raízes:

$\dfrac{p}{q} = \pm 1, \pm \dfrac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm \dfrac{3}{2}, \pm 6$

$x = -1$ é raiz.

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 2 & -9 & 6 & 11 & -6 \\ \hline & 2 & -11 & 17 & -6 & 0 \end{array}$$

$2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 = 0$

Nessa equação, como a_0 e a_n são os mesmos de P(x), os "candidatos" a raízes serão também os mesmos.

$\dfrac{p}{q} = \pm 1, \pm \dfrac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm \dfrac{3}{2}, \pm 6$

$x = 2$ é raíz.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & -11 & 17 & -6 \\ \hline & 2 & -7 & 3 & 0 \end{array}$$

$2x^2 - 7x + 3 = 0$

$x' = 3;\ x'' = \dfrac{1}{2}$

$S = \left\{-1, 2, 3, \dfrac{1}{2}\right\}$

Logo:

$P(x) = 2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot \left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

31.08) A

$x^3 + 8 = 0$

$x = -2$ é raiz (teorema das raízes racionais).

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 2x + 4 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$

$x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2}$

$x = 1 \pm \sqrt{3}i$

$S = \{-2, 1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i\}$

31.09) $x^5 - x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 8x - 8 = 0$
$x^4 . (x - 1) - 6x^2 . (x - 1) + 8 . (x - 1) = 0$
$(x - 1) . (x^4 - 6x^2 + 8) = 0$
$x - 1 = 0$
$x = 1$
ou
$x^4 - 6x^2 + 8 = 0$
$x^2 = y$
$y^2 - 6y + 8 = 0$
$y' = 4$
$y'' = 2$
para $y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
para $y = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$
$S = \{1, 2, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

31.10) C
$x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x = 0$
$x . (x^3 - 8x^2 + 19x - 12) = 0$
$x = 0$
ou
$x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$
Possíveis raízes:
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$
$x = 1$ é raiz.

1	1	–8	19	–12
	1	–7	12	0

$x^2 - 7x + 12 = 0$
$x' = 3; x'' = 4$
$S = \{0, 1, 3, 4\}$
Soma dos fatoriais:
$0! + 1! + 3! + 4! =$
$= 1 + 1 + 6 + 24 =$
$= 32$

31.11) C
$P(x) = 3x^6 - 8x^5 + 3x^4 + 2x^3 = 0$
$x^3 . (3x^3 - 8x^2 + 3x + 2) = 0$
$x = 0$ ou
$3x^3 - 8x^2 + 3x + 2 = 0$
$x = 1$ é raiz (teoremas das raízes racionais).

1	3	–8	3	2
	3	–5	–2	0

$3x^2 - 5x - 2 = 0$

$x' = 2; x'' = -\dfrac{1}{3}$

$S = \left\{0, 1, 2, -\dfrac{1}{3}\right\}$

31.12) $\dfrac{x^4 - 1}{x - 1} + 4x = (x + 2)^2 + 7$

$\dfrac{(x^2 - 1) . (x^2 + 1)}{x - 1} + \cancel{4x} = x^2 + \cancel{4x} + 4 + 7$

$\dfrac{\cancel{(x - 1)} . (x + 1) . (x^2 + 1)}{\cancel{(x - 1)}} = x^2 + 11; x \neq 1$

$x^3 + x + \cancel{x^2} + 1 = \cancel{x^2} + 11$
$x^3 + x - 10 = 0$
$x = 2$ é raiz (teorema das raízes racionais).

2	1	0	1	–10
	1	2	5	0

$x^2 + 2x + 5 = 0$
$\Delta = 4 - 4 . 1 . 5$
$\Delta = -16$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$

$x = \dfrac{-2 \pm 4i}{2}$

$x = -1 \pm 2i$
$S = \{2, -1 + 2i, -1 - 2i\}$

31.13) $P(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x - 10$
$Q(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$
Como **p** e **q** tem uma raiz em comum, existe **x** que satisfaz:
$x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x - 10 = x^3 + 3x^2 + x - 5$
$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x - 5 = 0$
$x = 1$ é raiz.

1	1	4	4	–4	–5
	1	5	9	5	0

Como $P(1) = 0$ e $Q(1) = 0$, $x = 1$ é raiz comum.
Raízes de Q(x):

1	1	3	1	–5
	1	4	5	0

$x^2 + 4x + 5 = 0$
$\Delta = 16 - 4 . 1 . 5 = -4$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$x = \dfrac{-4 \pm 2i}{2}$

$x = -2 \pm i$
$Q(x)$: $S = \{1, -2 + i, -2 - i\}$
Raízes de P(x):

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 5 & 7 & -3 & -10 \\ \hline & 1 & 6 & 13 & 10 & 0 \end{array}$$

$x^3 + 6x^2 + 13x + 10 = 0$
$x = -2$ é raiz.

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & 6 & 13 & 10 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

$x^2 + 4x + 5 = 0$
$x' = -2 + i$
$x'' = -2 - i$
P(x): $S = \{1, -2, -2 + i, -2 - i\}$
Raízes comuns de P e Q:
$1, -2 + i, -2 - i$

31.14) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$
$g(x) = f(x) - f(2)$
$g(x) = 0$
$f(x) - f(2) = 0$

$x^3 + x^2 - x + 2 - (8 + 4 - \cancel{2} + \cancel{2}) = 0$
$x^3 + x^2 - x - 10 = 0$
Possíveis raízes:
$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$
$x = 2$ é raiz.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 1 & -1 & -10 \\ \hline & 1 & 3 & 5 & 0 \end{array}$$

$x^2 + 3x + 5 = 0$
$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

$$S = \left\{2, \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2}\right\}$$

31.15) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$\lambda \neq -1;\ \mu \neq 1;\ \lambda\mu \neq 0$
a) Como as equações possuem uma raiz comum, existe **x** que satisfaz.
$\lambda x^3 - \mu x^2 - \cancel{x} - \cancel{(\lambda + 1)} = \lambda x^2 - \cancel{x} - \cancel{(\lambda + 1)}$
$\lambda x^3 + x^2 \cdot (-\mu - \lambda) = 0$
$x^2 \cdot (\lambda x - \mu - \lambda) = 0$
$x = 0$ ou $\lambda x - \mu - \lambda = 0$
$\lambda x = \mu + \lambda$

$$x = \frac{\mu + \lambda}{\lambda} \quad (*)$$

Se $x = 0$, substituindo-o em
$\lambda x^2 - x - (\lambda + 1) = 0$, temos:
$-(\lambda + 1) = 0$
$\lambda = -1$
(Contraria a hipótese de $\lambda \neq -1$.)

Se $x = \dfrac{\mu + \lambda}{\lambda}$, substituindo em
$\lambda x^2 - x - (\lambda + 1) = 0$, obtemos:

$$\lambda \cdot \left(\frac{\mu + \lambda}{\lambda}\right)^2 - \frac{\mu + \lambda}{\lambda} - (\lambda + 1) = 0$$

$$\cancel{\lambda} \cdot \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu + \lambda^2}{\cancel{\lambda^2}} - \frac{\mu + \lambda}{\lambda} - (\lambda + 1) = 0$$

$$\frac{\mu^2 + 2\lambda\mu + \lambda^2 - \mu - \lambda}{\lambda} - \lambda - 1 = 0$$

$$\frac{\mu^2 + 2\lambda\mu + \cancel{\lambda^2} - \mu - \lambda - \cancel{\lambda^2} - \lambda}{\cancel{\lambda}} = \frac{0}{\cancel{\lambda}}$$

$\mu^2 + 2\lambda\mu - 2\lambda - \mu = 0$

$\mu^2 + \mu \cdot (2\lambda - 1) - 2\lambda = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau e considerando μ a variável, encontramos:

$\Delta = (2\lambda - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2\lambda)$

$\Delta = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 + 8\lambda$

$\Delta = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = (2\lambda + 1)^2$

$$\mu = \frac{-(2\lambda - 1) \pm \sqrt{(2\lambda + 1)^2}}{2}$$

$$\mu = \frac{-2\lambda + 1 \pm (2\lambda + 1)}{2}$$

$$\mu' = \frac{2}{2} = 1 \text{ (Contraria a hipótese } \mu \neq 1.)$$

$$\mu'' = \frac{-4\lambda}{2} = -2\lambda$$

Logo, $\mu = -2\lambda$

b) Em (*) do item **a**, substituiremos $\mu = -2\lambda$,

$$x = \frac{\mu + \lambda}{\lambda}$$

$$x = \frac{-2\lambda + \lambda}{\lambda}$$

$$x = \frac{-\lambda}{\lambda}$$

$x = -1$

31.16) C
$x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$
Possíveis raízes.
$\pm 1, \pm 5$
$x = 1$ é raiz.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -3 & 7 & -5 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 2x + 5 = 0$
$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$x = \dfrac{2 \pm 4i}{2}$

$x = 1 \pm 2i$

Módulo das raízes:

$|1| = 1$

$|1 \pm 2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

Maior módulo: $\sqrt{5}$

31.17) D

$x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$

As possíveis raízes racionais são ± 1. Como há duas raízes racionais distantes, elas são $x = 1$ e $x = -1$.

Para $x = 1 \Rightarrow 1 + a + b + 1 = 0$

Para $x = -1 \Rightarrow -1 + a - b + 1 = 0$

$$\begin{cases} a + \cancel{b} = -2 \\ a - \cancel{b} = 0 \end{cases} \oplus$$

$2a = -2$

$a = -1$; $b = -1$

$P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

1	1	–1	–1	1
–1	1	0	–1	0
	1	–1	0	

$x - 1 = 0$

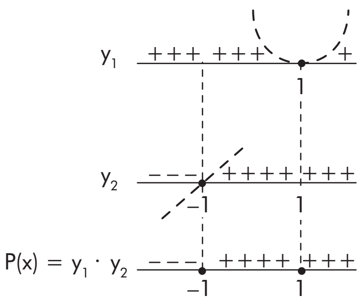
$x = 1$

$x' = 1$; $x'' = -1$; $x''' = 1$

$P(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 1)$

Sinal de $P(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 1)$:

$y_1 = (x - 1)^2$; $y_2 = x + 1$



$P(x) > 0$ para $x > 1$

31.18) $P(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 6x - 20 = 0$

Como a equação tem coeficientes racionais e $1 + \sqrt{5}$ é raiz, então $1 - \sqrt{5}$ também será.

Portanto $P(x)$ é divisível por $D(x) = [x - (1 + \sqrt{5})] \cdot [x - (1 - \sqrt{5})]$.

$D(x) = x^2 - x + \cancel{x\sqrt{5}} - x - \cancel{x\sqrt{5}} + (1 + \sqrt{5}) \cdot (1 - \sqrt{5}) =$

$= x^2 - 2x + 1 - 5 =$

$= x^2 - 2x - 4$

Dividindo $P(x)$ por $D(x)$, obtemos:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{x^4} & -6x^3 & +9x^2 & +6x & -20 & x^2 - 2x - 4 \\
\cancel{-x^4} & +2x^3 & +4x^2 & & & \underbrace{x^2 - 4x + 5}_{Q(x)} \\
\hline
 & \cancel{-4x^3} & +13x^2 & +6x & -20 & \\
 & \cancel{4x^3} & -8x^2 & -16x & & \\
\hline
 & & \cancel{5x^2} & \cancel{-10x} & \cancel{-20} & \\
 & & \cancel{-5x^2} & \cancel{+10x} & \cancel{+20} & \\
\hline
 & & & 0 & &
\end{array}$$

Resolvendo $Q(x) = 0$, encontramos:

$x^2 - 4x + 5 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4$

$x = \dfrac{4 \pm 2i}{2}$

$x = 2 \pm i$

$S = \{1 \pm \sqrt{5}, 2 \pm i\}$

Aula 32

32.01) C

$x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$

$P(1) = 1 - 2 + \cancel{1} - \cancel{1} = -1$

$P(2) = \cancel{8} - \cancel{8} + 2 - 1 = 1$

Pelo teorema de Bolzano, existe raiz real no intervalo]1, 2[.

32.02) D

$$P(x) = x^4 - x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{4}$$

x = 1 é raiz.

1	1	–1	–3/4	1	–1/4
	1	0	–3/4	1/4	0

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = 0$$

x = –1 é raiz.

–1	1	0	–3/4	1/4
	1	–1	1/4	0

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

$$x' = x'' = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{1, -1, \frac{1}{2}\right\}$$

32.03) A

$P(-1) > 0$ e $P(2) > 0$

Pelo teorema de Bolzano, existe um número par de raízes reais ou não existem raízes reais no intervalo]–1, 2[.

32.04) 52

$x^3 - 4x + 1 = 0$

$\Downarrow$

$x^3 + 0 \,.\, x^2 - 4x + 1 = 0$

01. **Incorreta**.

$$\text{Produto: } -\frac{d}{a} = -\frac{1}{1} = -1$$

02. **Incorreta**.

$$\text{Soma: } -\frac{b}{a} = -\frac{0}{1} = 0$$

16. **Correta**.

$P(0) = 1$

$P(1) = 1 - 4 + 1 = -2$

$P(0) > 0$

$P(1) < 0$

Existe raiz real em [0, 1].

32. **Correta**.

$P(1) = -2$

$P(2) = 8 - 8 + 1 = 1$

$P(1) < 0$

$P(2) > 0$

Existe raiz real em [1, 2].

04. **Correta**. Como o grau é 3 e já existem duas raízes reais, (pelos itens 16 e 32), concluímos que a terceira raiz também é real.

08. **Incorreta**. Veja o item 04.

32.05) $P(x) = x^3 + x^2 + 5x + \alpha$

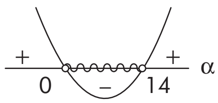
$P(-2) = -8 + 4 - 10 + \alpha = -14 + \alpha$

$P(0) = \alpha$

$P(-2) \,.\, P(0) < 0$

$(-14 + \alpha) \,.\, \alpha < 0$

$\alpha^2 - 14\alpha < 0$



$0 < \alpha < 14$

32.06) E

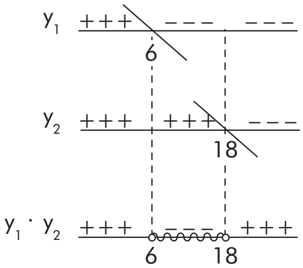
$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - k$

$P(2) = 8 - 8 + 6 - k = 6 - k$

$P(3) = 27 - 18 + 9 - k = 18 - k$

$P(2) \,.\, P(3) < 0$

$$\underbrace{(6 - k)}_{y_1} \,.\, \underbrace{(18 - k)}_{y_2} < 0$$



$6 < k < 18$

32.07) $P(x)\ x^3 + x^2 - 2x$

a) $x^3 + x^2 - 2x = 0$

$x \,.\, (x^2 + x - 2) = 0$

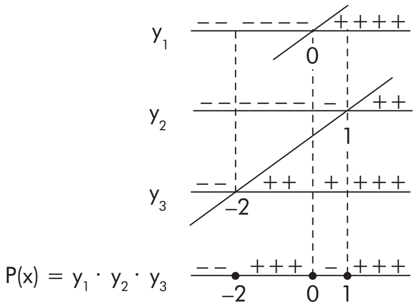
$x = 0$ ou $x^2 + x - 2 = 0$

$x' = 1;\ x'' = -2$

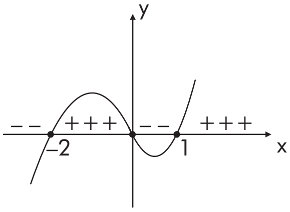
$S = \{0, 1, -2\}$

b) Sinal de P(x)

$$P(x) = \underbrace{(x - 0)}_{y_1} \,.\, \underbrace{(x - 1)}_{y_2} \,.\, \underbrace{(x + 2)}_{y_3}$$



Esboço de P(x)



32.08) a) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$

Raízes:

$x^3 - 7x^2 + 10x = 0$

$x \,.\, (x^2 - 7x + 10) = 0$

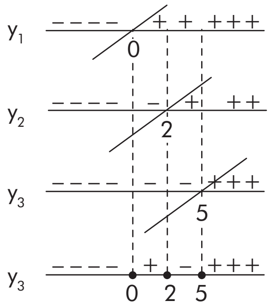
$x = 0$ ou $x^2 - 7x + 10 = 0$

$x' = 2;\ x'' = 5$

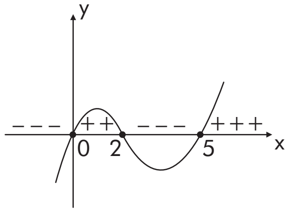
$S = \{0, 2, 5\}$

$P(x) = \underbrace{(x - 0)}_{y_1} \,.\, \underbrace{(x - 2)}_{y_2} \,.\, \underbrace{(x - 5)}_{y_3}$

Sinal de P(x)



$P(x) = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$



b) $P(x) = -x^3 - 4x^2 + 4x + 16$

Raízes:

$-x^3 - 4x^2 + 4x + 16 = 0$

$-x^2 \,.\, (x + 4) + 4 \,.\, (x + 4) = 0$

$(-x^2 + 4) \,.\, (x + 4) = 0$

$-x^2 + 4 = 0$

$x = \pm 2$

ou

$x + 4 = 0$

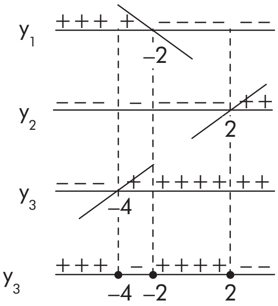
$x = -4$

Logo:

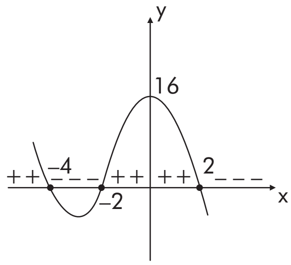
$P(x) = -1 \,.\, (x + 2) \,.\, (x - 2) \,.\, (x + 4)$

$P(x) = \underbrace{(-x - 2)}_{y_1} \,.\, \underbrace{(x - 2)}_{y_2} \,.\, \underbrace{(x + 4)}_{y_3}$

Sinal



$P(x) = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$



c) $P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

Raízes: $y = x^2$

$y^2 - 10y + 9 = 0$

$y' = 9;\ y'' = 1$

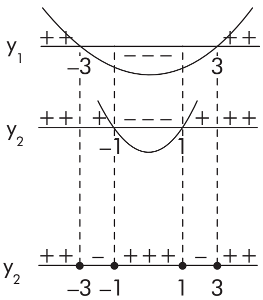
$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$x^2 = \Rightarrow x = \pm 1$

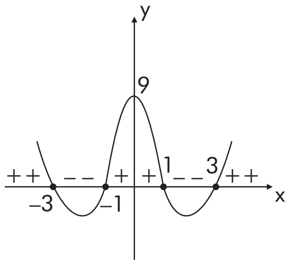
$P(x) = (x - 3) \,.\, (x + 3) \,.\, (x - 1) \,.\, (x + 1)$

$P(x) = \underbrace{(x^2 - 9)}_{y_1} \,.\, \underbrace{(x^2 - 1)}_{y_2}$

Sinal



$P(x) = y_1 \cdot y_2$



32.09) B

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Como o gráfico intercepta o ponto (0, –3), então $P(0) = d = -3$.

I. **Incorreta**.

$x' = -2$; $x'' = -2$; $x''' = 3$

II. **Correta**.

$d = -3$

III. **Incorreta**. Veja item I.

32.10) A

$f(x) = -2x^3 + ax^2 + bx + c$

Pelo gráfico, $f(0) = 3$

$f(0) = c = 3$

Além disso, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

$$-\cancel{2} \cdot \frac{27}{\cancel{8}} + a \cdot \frac{9}{4} + b \cdot \frac{3}{2} + 3 = 0$$

$$-\frac{27}{4} + \frac{9a}{4} + \frac{3b}{2} + 3 = 0$$

$$\frac{-27 + 9a + 6b + 12}{\cancel{4}} = \frac{0}{\cancel{4}}$$

$9a + 6b = 15 \quad (\div 3)$

$3a + 2b = 5 \quad (*)$

Como a soma é igual ao produto, então $\frac{a}{\cancel{2}} = \frac{c}{\cancel{2}}$.

$a = c$

$a = 3$

Substituindo em (*), obtemos:

$3 \cdot 3 + 2b = 5$

$2b = -4$

$b = -2$

Logo, $a + b + c = 3 - 2 + 3 = 4$

32.11) E

Pelo esboço do gráfico, $x = 1$ é raiz de multiplicidade par e $x = 2$ é raiz simples.

Pelas alternativas apresentadas, 1 é raiz dupla.

Assim:

$P(x) = a \cdot (x - 1)^2 \cdot (x - 2)$

$P(x) = a \cdot (x^2 - 2x + 1) \cdot (x - 2)$

$P(x) = a \cdot (x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 4x + x - 2)$

$P(x) = a \cdot (x^3 - 4x^2 + 5x - 2)$

Como $P(0) = 2$, temos:

$P(0) = a \cdot (-2) = 2$

$\Downarrow$

$a = -1$

Assim:

$P(x) = -1 \cdot (x^3 - 4x^2 + 5x - 2)$

$P(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2$

32.12) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 26$

a) $P(2 + 3i)$

$(2 + 3i)^3 - 2 \cdot (2 + 3i)^2 + 5 \cdot (2 + 3i) + 26 =$

$= (2 + 3i) \cdot (2+3i)^2 - 2 \cdot (4 + 12i - 9) + 10 + 15i + 26 =$

$= (2 + 3i) \cdot (-5 + 12i) - 2 \cdot (-5 + 12i) + 36 + 15i =$

$= -\cancel{10} + \cancel{24i} - \cancel{15i} - \cancel{36} + \cancel{10} - \cancel{24i} + \cancel{36} + \cancel{15i} =$

$= 0$

$2 + 3i$ é raiz de $P(x)$.

Já podemos cancluir que, como os coeficientes de $P(x)$ são reais, $2 - 3i$ também é raiz.

b) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 26$

Raízes: $2 + 3i$, $2 - 3i$, r

Soma: $-\frac{b}{a}$

$2 + \cancel{3i} + \cancel{2} - \cancel{3i} + r = \cancel{2}$

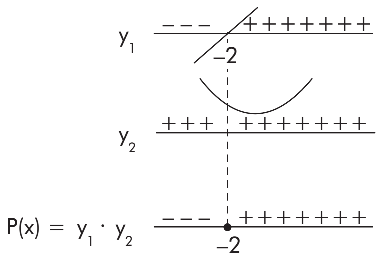
$r = -2$

Logo, $P(x) = (x + 2) \cdot [x - (2 + 3i)] \cdot [x - (2 - 3i)]$

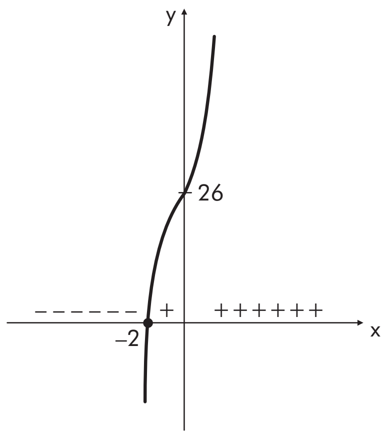
$P(x) = (x + 2) \cdot [x^2 - 2x + \cancel{3ix} - 2x - \cancel{3ix} + (2 + 3i) \cdot (2 - 3i)]$

$P(x) = (x + 2) \cdot (x^2 - 4x + 4 + 9)$

$P(x) = \underbrace{(x + 2)}_{y_1} \cdot \underbrace{(x^2 - 4x + 13)}_{y_2}$



Gráfico



c) Pelo gráfico, $P(x) > 0$ para $x > -2$

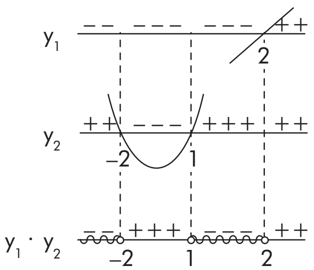
32.13) a) $P(x) = x^3 - x^2 - 4$
Possíveis raízes racionais:
$\pm 1, \pm 2, \pm 4$
$x = 2$ é raiz.

2	1	–1	0	–4
	1	1	2	0

$x^2 + x + 2 = 0$
$\Delta = 1 - 4 . 1 . 2 = -7$
$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$
$S = \left\{2, \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}\right\}$
Raiz inteira: $x = 2$

b) Pelo item **a**, temos:
$P(x) = (x - 2) . (x^2 + x + 2)$

c) $P(x) < 4 . (x - 2)$
$(x - 2) . (x^2 + x + 2) < 4 . (x - 2)$
$(x - 2) . (x^2 + x + 2) - 4 . (x - 2) < 0$
$(x - 2) . [x^2 + x + 2 - 4] < 0$
$\underbrace{(x - 2)}_{y_1} . \underbrace{(x^2 + x - 2)}_{y_2} < 0$



$x < -2$ ou $1 < x < 2$

32.14) B
$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$
Raízes:
$x^3 + 3x + 2x = 0$
$x . (x^2 + 3x + 2) = 0$
$x = 0$ ou $x^2 + 3x + 2 = 0$
$x' = -1; x'' = -2$
$S = \{0, -1, -2\}$

32.15) B
$P(x) = -x + 1$
Raiz: $x = 1$
$Q(x) = x^3 - x$
Raízes:
$x^3 - x = 0$
$x . (x^2 - 1) = 0$
$x' = 0; x'' = 1; x''' = -1$
Como $P(1) = Q(1)$, o gráfico de $P(x)$ intercepta o gráfico de $Q(x)$.

32.16) E
$P(x) = x^3 + kx^2 + x$
Raízes:
$x^3 + kx^2 + x = 0$
$x . (x^2 + kx + 1) = 0$
$x = 0$ ou $x^2 + kx + 1 = 0$
Pela linha anterior, concluímos que $x = 0$ é raiz simples.
Assim, o gráfico **d** não pode representar $P(x)$, pois nele encontramos $x = 0$ como raiz dupla.
Como o produto das raízes da equação $x^2 + kx + 1 = 0$ é igual a 1, eliminamos também o gráfico **a**.
Se uma das raízes de $x^2 + kx + 1 = 0$ for $x = 1$, teremos:
$1 + k + 1 = 0$
$k = -2$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$x' = 1; x'' = 1$
Nesse caso, $x = 1$ seria raiz dupla e o gráfico tangenciaria o eixo **x** no ponto $x = 1$.
Assim, eliminamos o gráfico **c**.
Se **k** for raiz de $x^2 + kx + 1 = 0$, teremos
$k^2 + k^2 + 1 = 0$
$k^2 = -1/2$
Note que é impossível, já que $k \in \mathbb{R}$.
Logo, o único gráfico possível é o do item **e**.

32.17) 23
01. **Correto**.
$P(x) = (x + 3)^{200} - (x + 2)^{101} - 1$
$P(-3) = 0 - (-1)^{101} - 1 = 0$
$P(-2) = 1^{200} - 0 - 1 = 0$
Logo, $P(x)$ é divisível por $(x + 3) . (x + 2)$.
02. **Correto**.
Teorema de Bolzano
$P(x) = x^4 - 3x^2 + x - 2$
$P(0) = -2$
$P(2) = 16 - 12 + \cancel{2} - \cancel{2} = 4$
$P(0) < 0$ e $P(2) > 0$
04. **Correto**.
$(x^2 + 3)^4 = x^8 + 4x^6 . 3 + 6x^4 . 3^2 + 4x^2 . 3^3 + 3^4 =$
$= x^8 + 12x^6 + 54x^4 + 108x^2 + 81$
Produto: 81
08. **Incorreto**.
$x^3 - 4x = 0$
$x . (x^2 - 4) = 0$
$x = 0$ ou $x^2 - 4 = 0$
$x = \pm 2$
$S = \{0, 2, -2\}$
16. **Correto**.
Raiz: $x_1 = 1 - i$
$x_2 = 1 + i$
$x_3 = ?$
Soma
$x_1 + x_2 + x_3 = -4$
$1 - \cancel{i} + 1 + \cancel{i} + x_3 = -4$
$x_3 = -6$

32.18) E
I. **Correta**. Note que $P(0) = 2$ e que $x = 1$ é raiz de multiplicidade par. Como o polinômio é de grau 3 e $x = -2$ é raiz simples, $x = 1$ é raiz dupla.
II. **Incorreta**.
III. **Incoreta**.
IV. **Correta**.